Probability with Martingales のギャップとかメモ

概要

タイトル通り。ネットの海からこれを見つけ出した方は参考にしていただけると嬉しい。
David Williams 著 ”Probability with Martingales”。

1 Chapter 1

1.1 p16 Exercise

$C_1 \cap C_2 \notin \mathcal{C}$ となる $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ の具体例を示す。$a_n(C) := \frac{\#\{k \in C; k \leq n\}}{n}$ とする。このとき、$2\mathbb{N} \in \mathcal{C}$ であることを示す。

$$a_n(2\mathbb{N}) = \begin{cases} \frac{1}{2} & n \in 2\mathbb{N} \\ \frac{(n-1)}{2n} & \text{else} \end{cases}$$

となるので、

$$\sup_{n \leq k} a_k(2\mathbb{N}) = \frac{1}{2}$$
$$\inf_{n \leq k} a_k(2\mathbb{N}) = \frac{n-1}{2n}$$

で、それぞれの極限は

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{n \leq k} a_k(2\mathbb{N}) = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{n\to\infty} \inf_{n \leq k} a_k(2\mathbb{N}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}$$

すなわち、$\lim_{n\to\infty} a_n(2\mathbb{N}) = \frac{1}{2}$ となり収束するので、$2\mathbb{N} \in \mathcal{C}$。

次に、C を次のように構成する。$n = 0, 1, 2, \ldots$ について、

- $[2^{2n}, 2^{2n+1})$ に含まれる奇数の元は C の元である
- $[2^{2n}, 2^{2n+1})$ に含まれる偶数の元は C の元である
- それ以外の元は C に含まれない

とする。この時、$C = \{1, 2, 5, 7, 8, 10, \ldots\}$ と構成されていくが、これは明らかに $a_n(C) \to \frac{1}{2}$ $(n \to \infty)$ となる (証明は前述とほぼ同じ)。

このとき、$F := 2\mathbb{N} \cap C \notin \mathcal{C}$ であることを示す。F の定義を書き直すと、

$$F = \{k \in 2\mathbb{N}; k \in [2^{2n}, 2^{2n+1}), \exists n \in \mathbb{N}\}$$

である。この $a_n(F)$ が収束しないことを示す、すなわち振動することをしめせばいいので、適当な 2 つの部分列をとってくればよい。これは、$a_{2^{2n}-1}(F)$ と $a_{2^{2n+1}-1}(F)$ を考えればうまくいく。

- $a_{2^{2n}-1}(F)$ の極限

$$\begin{aligned} a_{2^{2n}-1}(F) &= \frac{2 + 2^3 + \cdots + 2^{2n-1}}{2^{2n} - 1} \\ &= \frac{2(1 + 2^2 + \cdots + 2^{2n-2})}{2^{2n} - 1} \\ &= \frac{2^{2n} - 1}{2^2 - 1} \cdot \frac{1}{2^{2n} - 1} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

- $a_{2^{2n+1}-1}(F)$ の極限

$$\begin{aligned} a_{2^{2n+1}-1}(F) &= 1 - \frac{1 + 2^2 + \cdots + 2^{2n}}{2^{2n+1} - 1} \\ &= 1 - \frac{2^{2n+2} - 1}{2^2 - 1} \cdot \frac{1}{2^{2n+1} - 1} \\ &= 1 - \frac{4^{n+1} - 1}{3(2 \cdot 4^n - 1)} \\ &= 1 - \frac{4 - 1/4^n}{6 - 3/4^n} \to 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

以上より二つの部分列をとってきたとき、その極限値が一致しないので $a_n(F)$ は振動する、すなわちこの Excersize の主張が正しいことがわかった。

1.2 17 ページ Borel σ-algebra の証明について

$\mathcal{B} := \mathcal{B}(R), \pi(R) := \{(-\infty, x]; x \in \mathbb{R}\}$ とするとき、

$$\mathcal{B} = \sigma(\pi(\mathbb{R}))$$

であることを示すのが、Examples の目的である。示すべきことは以下のとおりである。

step 1. $I \in \pi(\mathbb{R}) \Rightarrow I \in \mathcal{B}$ を示す。

step 2. $O \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \Rightarrow O \in \sigma(\pi(R))$ を示す。

(a) O が可算個の開区間の和で表せる、すなわち、$\exists a_n, b_n \in \mathbb{R}, a_n < b_n \ (n \in \mathbb{N})$ があって、

$$O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n)$$

（b）このとき、任意の開区間 (a, b) $(a, b \in \mathbb{R})$ が $I \in \sigma(\pi(\mathbb{R}))$ の元であることを示す。

証明. $\mathbb{R}$ の開集合全体の集合を $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ とする。

step 1. ”$I \in \pi(\mathbb{R}) \Rightarrow I \in \mathcal{B}$”

$I \in \pi(\mathbb{R})$ とすると、$\exists x \in \mathbb{R}$ があって、

$$I = (-\infty, x]$$

と表される。このとき、

$$I = \bigcap_n (-\infty, x + n^{-1})$$

を示せば良い (自明として扱っていいが、ここではあえて証明する)。

（a）”$I \subseteq \bigcap_n (-\infty, x + n^{-1})$”

これは自明である。

（b）”$\bigcap_n (-\infty, x + n^{-1}) \subseteq I$”

$a \in \bigcap_n (-\infty, x + n^{-1})$ とすると、$\forall n \in \mathbb{N}$

$$-\infty < a < x + n^{-1}$$

となる。我々が示したいことは、$a \leq x$ を満たすことである。これは

$$a > x \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N};\ a > x + n^{-1}$$

を示すことによって達成されるが、$a - x > n^{-1} > 0, 1 > 0$ なのでアルキメデスの公理[*1] より、$\exists n \in \mathbb{N}$ があって、

$$\begin{aligned} (a - x) \cdot n &> 1 \\ a &> x + n^{-1} \end{aligned}$$

よって、示した命題の対偶をとって

$$x \leq a$$

である。

これにより、$I = \bigcap_n (-\infty, x + n^{-1})$ を示すことができた。ここで、$I = \bigcap_n (-\infty, x + n^{-1}) \in \mathcal{B}$ なので、$I \in \mathcal{B}$。

$\therefore$ 任意の $n \in \mathbb{N}$ について、$(-\infty, x + n^{-1}) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ である。これはすなわち、$(-\infty, x + n^{-1}) \in \mathcal{B}$ に他ならず、$\mathcal{B}$ は σ-algebra なので、開区間の可算個の和集合はもちろん $\mathcal{B}$ の元となる。

[*1] $a, b > 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$ に対してある $n \in \mathbb{N}$ があって

$$an > b$$

とすることができる。

step 2. ”$O \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \Rightarrow O \in \sigma(\pi(R))$” まず、$\mathbb{R}$ が第二可算公理を満たすこと示す。すなわち、$\forall O \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ がある可算個の開区間 (a_n, b_n) $(n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n)$ を用いて、

$$O = \bigcup_n (a_n, b_n)$$

O は開集合なので $\forall x \in O, \exists \epsilon > 0;$

$$B(x; \epsilon) \subseteq O \Rightarrow (x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq O$$

また、$\mathbb{Q}$ は、$\mathbb{R}$ において稠密であるので、$\forall x \in O$ について、$\exists \overline{q_x}, \underline{q_x} \in \mathbb{Q}$ があって、

$$x - \epsilon < \underline{q_x} < x < \overline{q_x} < x + \epsilon$$

とすることができる。このとき、$x \in (\underline{q_x}, \overline{q_x}) \subseteq B(x; \epsilon) \subseteq O$ であるので、$Q_x := (\underline{q_x}, \overline{q_x})$ と定義すると、

$$\bigcup_{x \in O} Q_x \subseteq O$$

となる。よって、$O \subseteq \bigcup_{x \in O} Q_x$ を示せば良いが、これは自明である。すなわち、

$$O = \bigcup_{x \in O} Q_x$$

ところで、$\mathcal{I} := \{Q_x; x \in O\}, \mathcal{I}_{\mathbb{Q}} := \{(p, q); p, q \in \mathbb{Q}\}$ とすると、明らかに $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}_{\mathbb{Q}}$ である。$\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}$ は可算濃度なので、$\mathcal{I}$ も可算濃度である。つまり、O は $\mathcal{I}$ の元の和集合、すなわち、可算個の開区間の和で表せる。

よって、任意の $O \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ に対して、ある開区間列 $\{(a_n, b_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ があって、

$$O = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n)$$

となる。このとき、$(a_n, b_n) \in \mathcal{B}$ $(n \in \mathbb{N})$ であり、$\mathcal{B}$ は σ-algebra なので、

$$\forall n \in \mathbb{N}; (a_n, b_n) \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n) \in \mathcal{B}$$

である。したがって示すことは、”任意の開区間 (a, b) $(a, b \in \mathbb{R})$ は $\sigma(\pi(\mathbb{R}))$ の元”である。これを示すためには、

$$(a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a, b - \frac{b - a}{n})$$

であることを示せばいい。

(a) ”$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a, b - \frac{b-a}{n}) \subseteq (a, b)$”

これは自明である。

(b) ”$(a,b) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a, b-\frac{b-a}{n})$”

$x \in (a,b)$ とすると、$a < x < b$ であるが、このとき、$\exists n \in \mathbb{N}$ があって、

$$x < \frac{b-a}{n}$$

を示せばいい。$a = b$ のときは空集合となり $\sigma(\pi(\mathbb{R}))$ の元であるので、$a < b$ と仮定する。すると $b-a > 0, b-x > 0$ となるのでアルキメデスの公理より、$\exists n \in \mathbb{N}$;

$$\begin{aligned}(b-a) &< (b-x)n \\ \frac{b-a}{n} &< b-x \\ x-b &< -\frac{b-a}{n} \\ x &< b-\frac{b-a}{n}\end{aligned}$$

$\therefore\ x \in (a, b-\frac{b-a}{n})$ $(\exists n \in \mathbb{N})$ すなわち

$$(a,b) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a, b-\frac{b-a}{n})$$

が成立する。

$\square$

2 Chapter 4

2.1 Independence p.40

定義. $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots$ が独立であるとは,$G_i \in \mathcal{G}_i (i \in \mathbb{N})$ で $i_1, \ldots i_n$ が相異なるとき, つねに

$$\mathbb{P}\left(G_{i_1} \cap \cdots \cap G_{i_n}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(G_{i_k}\right)$$

が成り立つこと.

定義. 確率変数 $X_1, X_2, \ldots$ が独立であるとは, σ-加法族 $\sigma(X_1), \sigma(X_2), \ldots$ が独立であること.

定義. 事象 $E_1, E_2, \ldots$ が独立であるとは, σ-加法族 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ が独立であること. ただしここで, ε_n は σ-加法族 $\{\phi, E_n, \Omega \setminus E_n, \Omega\}$ である.

補題.

3 Chapter 6

3.1 65 ページ 9 行目

$c_1U_1 + c_2U_2 \sim c_1V_1 + c_2V_2$ について。

$$\begin{aligned} &\{x \mid (c_1U_1 + c_2U_2)(x) \neq (c_1V_1 + c_2V_2)(x)\} \\ \Leftrightarrow &\{x \mid (c_1U_1 + c_2U_2)(x) - (c_1V_1 + c_2V_2)(x) \neq 0\} =: A \end{aligned}$$

の測度が 0 であることを示せばよい。明らかに、

$$c_1U_1 \sim c_1V_1, c_2U_2 \sim c_2V_2$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{x \mid c_1U_1(x) \neq c_1V_1(x)\} \\ A_2 &:= \{x \mid c_2U_2(x) \neq c_2V_2(x)\} \end{aligned}$$

の測度はそれぞれ 0 である[*2]。このとき、次が成立。

$$A \subset A_1 \cup A_2$$

背理法で示す。上式の左辺から任意に x を取る。$x \notin A_1 \cup A_2$、つまり、

$$x \in A_1^c \cap A_2^c$$

と仮定する。このとき、$c_1U_1(x) = c_1V_1(x), c_2U_2(x) = c_2V_2(x)$ であるから、

$$(c_1U_1 + c_2U_2)(x) - (c_1V_1 + c_2V_2)(x) = 0$$

より、矛盾する。また、

$$\begin{aligned} A = &\{x \mid (c_1U_1 + c_2U_2)(x) - (c_1V_1 + c_2V_2)(x) < 0\} \\ &\qquad \cup \{x \mid (c_1U_1 + c_2U_2)(x) - (c_1V_1 + c_2V_2)(x) > 0\} \end{aligned}$$

であるから、A は可測集合。したがって、測度の単調性より、A の測度は 0。

3.2 65 ページ 10 行目

$U_n \to U$ より、$N \in \mathbb{N}$ が存在して、$n \geq N \Rightarrow ||U_n - U|| < \varepsilon \quad (\forall \varepsilon > 0)$ である。$U_n \sim V_n, U \sim V$ より、$||V_N - V|| < \varepsilon$ が分かる。

*2 別に A_1 などと名前を付けなくてもいいが (むしろ名前を付けない方がわかりやすい。)、紙面のスペースの都合上名前を付けている。

3.3 67 ページ 10 行目から 12 行目

3.3.1 (ii) $\Rightarrow$ (i) について。

(逆向きは本の中で証明されています。)

任意の $Z \in \mathcal{K}$ を取ると、$||X - Z|| \geq ||X - Y|| + \alpha$ となることを示すとよい。ここで、$\alpha > 0$ である。しかし、Z として $Y + tZ \quad (t \in \mathbb{R})$ とすればよい。これは $\mathcal{L}^p$ の線形性のためである。なんとなれば、$Z = \frac{-Y+W}{t} \quad (\forall W \in \mathcal{K})$ とすればよい。$\langle X - Y, Z \rangle = \mathbf{E}[(X - Y)Z] = 0$ 即ち、$\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[YZ]$ が成り立つことに注意して、$||X - Y - tZ||^2$ を計算すると分かる*3。

3.3.2 $||Y - Y'|| = 0$ について。

$$\mathbf{E}[(X - Y)(Y - Y')] = 0$$
$$\mathbf{E}[(X - Y')(Y - Y')] = 0$$

という式をそれぞれ期待値の中身を展開して引き算すると、

$$\mathbf{E}[(Y - Y')^2] = 0$$

という式が求められるから $Y = Y' \quad (a.s.)$。

3.4 70 ページ 8,9 行目

3.4.1 $(\mathbf{P}(u))^q \leq \mathbf{P}(u^q)$ について。

記号が見慣れなくてよくわからないが、$\mathbf{P}$ は直前で確率測度であると示しているから、$\mathbf{P}(u)$ とは $\mathbf{P}$ による u の期待値である。凸関数 $c(x) = x^q$ を考えると、この不等式はイェンゼンの不等式を用いるとすぐに従うことが分かる。そのためには、イェンゼンの不等式を用いるための条件を満たしているかを確認しよう。u の定義は $f(s) = 0$ の部分で $u(s) = 0$ なので、下記の計算には本当は $1_{\{f(s)>0\}}$ を書いておくべき。

3.4.2 $\mathbf{P}(u^q) < \infty$ であること

Chapter 5 で見たように、f, h を可測関数、μ を測度とすれば、

$$(hf)\mu = h(f\mu)$$

*3 2 乗しないと計算しにくい。

が成立していた。これを用いる。また、$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ にも注意しておく。

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(u^q) &= \frac{h^q}{f^{q(p-1)}}\frac{f^p\mu}{\mu(f^p)} = \frac{h^q}{f^p}\frac{f^p\mu}{\mu(f^p)} = \frac{h^q}{f^p}f^p\frac{\mu}{\mu(f^p)} \\ &= h^q\frac{\mu}{\mu(f^p)} = \frac{h^q}{\mu(f^p)}\mu = \frac{1}{\mu(f^p)}\int h^q d\mu < \infty\end{aligned}$$

3.4.3 $\mathbf{P}(u) < \infty$ について

ヤングの不等式を用いる。

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(u) &= \frac{h}{f^{p-1}}\frac{f^p\mu}{\mu(f^p)} = hf\frac{\mu}{\mu(f^p)} = \frac{hf}{\mu(f^p)}\mu \\ &\le \frac{1}{\mu(f^p)}\left(\frac{f^p}{p}+\frac{h^q}{q}\right)\mu < \infty\end{aligned}$$

3.4.4 ヘルダーの不等式の証明

$(\mathbf{P}(u))^q \le \mathbf{P}(u^q)$ を展開する。ここでも $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ を適宜変形して利用する。

$$\begin{aligned}\left(\frac{h}{\mu(f^{(p-1)}}1_{\{f(s)>0\}}\frac{f^p\mu}{\mu(f^p)}\right)^q &\le \frac{h^q}{f^{q(p-1)}}1_{\{f(s)>0\}}\frac{f^p}{\mu(f^p)} \\ \left(\frac{1}{\mu(f^p)}\right)^q (hf\mu)^q &\le \left(\frac{1}{\mu(f^p)}\right)\left(h^q\frac{f^p}{f^{q(p-1)}}1_{\{f(s)>0\}}\mu\right) \\ (hf\mu)^q &\le (\mu(f^p))^{q-1}\left(h^q\frac{f^p}{f^p}1_{\{f(s)>0\}}\mu\right) \\ (hf\mu)^q &\le (\mu(f^p))^{\frac{q}{p}}(h^q\mu) \\ (hf\mu) &\le (\mu(f^p))^{\frac{1}{p}}(h^q\mu)^{\frac{1}{q}} \\ \int fhd\mu &\le \left(\int f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int h^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

通常の log を使う証明じゃないの面白いね。

4 Chapter 7

4.1 大数の法則を証明する前の補題

命題. S_k-値確率変数列 $(X_k)_{k=1,2,\cdots,n}$ は独立で、$g_k\colon S_k \to S'_k$ は $\mathcal{S}_k$-可測関数とする。このとき、$Y_k = g_k(X_k)$ とおけば、$(Y_k)_{k=1,2,\cdots,n}$ は独立。

証明. $A'_k \in \mathcal{S}'_k$ とする。

$$\{Y_k \in A'_k\} = \{X_k \in g_k^{-1}(A'_k)\}$$

であり、g_k の可測性から、

$$g_k^{-1}(A'_k) \in \mathcal{S}_k$$

であることから、

$$\{X_k \in g_k^{-1}(A'_k)\} \in \sigma(X_k)$$

よって、

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}(Y_k \in A'_k)\right) &= \mathbb{P}\left((\bigcap_{k=1}^{n}(X_k \in g_k^{-1}(A'_k))\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \in g_k^{-1}(A'_k) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Y_k \in A'_k)
\end{aligned}$$

□

命題. $(X_k)_{k=1,2,\cdots,n}$ が $\mathbb{R}$-値独立確率変数の列とする。$g = g(x_1, x_2, \cdots, x_i)$ は $\mathbb{R}^i \to \mathbb{R}$ のボレル可測関数とする。ただし、$i < n$。このとき、$Y := g(X_1, X_2, \cdots, X_i)$ とおけば、$Y, X_{i+1}, \cdots, X_n$ は独立。

証明. $X = (X_1, \cdots, X_i)$ は $\mathbb{R}^i$-値確率変数であり、$X, X_{i+1}, \cdots, X_n$ は独立である。まずはこれを示す。$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^i), A_{i+1}, \cdots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ について、

$$\mathbb{P}(X \in A, X_{i+1} \in A_{i+1}, \cdots, X_n \in A_n) = \mathbb{P}(X \in A) \prod_{j=i+1}^{n} \mathbb{P}(X_j \in A_j) \tag{1}$$

が成立することを言えばよい。そこで、

$$\mathcal{L} = \{A \subset \mathbb{R}^i \mid (1) \text{ が成立 }\}$$

と定義する。$\mathcal{L}$ は λ-system である。明らかに $\Omega \in \mathcal{L}$ である。次に、$A, B \in \mathcal{L}, A \subset B$ とすると、$\mathbb{P}(X \in B - A) = \mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(X \in A)$ であることに注意すれば、

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X \in B - A, X_{i+1} \in A_{i+1}, \cdots, X_n \in A_n) \\
=&\mathbb{P}(X \in B, X_{i+1} \in A_{i+1}, \cdots, X_n \in A_n) - \mathbb{P}(X \in A, X_{i+1} \in A_{i+1}, \cdots, X_n \in A_n) \\
=&\mathbb{P}(X \in B) \prod_{j=i+1}^{n} \mathbb{P}(X_j \in A_j) - \mathbb{P}(X \in A) \prod_{j=i+1}^{n} \mathbb{P}(X_j \in A_j) \\
=&\left(\mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(X \in A)\right) \prod_{j=i+1}^{n} \mathbb{P}(X_j \in A_j) \\
=&\mathbb{P}(X \in B - A) \prod_{j=i+1}^{n} \mathbb{P}(X_j \in A_j)
\end{aligned}$$

なので、$B-A\in\mathcal{L}$。最後に、$A_n\in\mathcal{L}\quad(n=1,2,\cdots)$ で、$A_n\uparrow A$ とする。$X\in A$ とすれば、$\exists m\in\mathbb{N}\quad s.t.\quad X\in A_m$ なので、そのような自然数で最小のものを m とする[*4]。集合列 (A_n) は包含関係に関して単調増加であるため、すべての $N\geq m$ に対して、

$$\{X\in A_m\}=\{X\in A_N\}$$

が成立する。したがって当然

$$\{X\in A_m\}=\bigcup_{k=N}^{\infty}\{X\in A_k\}=\{X\in A\}$$

よって、

$$\mathbb{P}(X\in A_m)=\mathbb{P}(X\in A)$$

よって次のように計算ができる。

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X\in A,X_{i+1}\in A_{i+1},\cdots,X_n\in A_n)\\
=&\mathbb{P}(X\in A_m,X_{i+1}\in A_{i+1},\cdots,X_n\in A_n)\\
=&\mathbb{P}(X\in A_m)\prod_{j=i+1}^{n}\mathbb{P}(X_j\in A_j)\\
=&\mathbb{P}(X\in A)\prod_{j=i+1}^{n}\mathbb{P}(X_j\in A_j)
\end{aligned}$$

これにより、$A\in\mathcal{L}$ であることが分かる。以上より $\mathcal{L}$ は λ-system。

さて、$\mathcal{P}=\{A_1\times\cdots\times A_i\mid A_k\in\mathcal{B}(\mathbb{R}),k=1,2,\cdots,i\}$ は π-system であり、$A\in\mathcal{P}$ とすれば、直積の定義より

$$X\in A\Leftrightarrow X_1\in A_1,\cdots,X_i\in A_i$$

より、

$$\{X\in A\}=\{X_1\in A_1\}\cap\cdots\cap\{X_i\in A_i\}$$

仮定から $X_1,\cdots,X_n$ は独立なので

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X\in A,X_{i+1}\in A_{i+1},\cdots,X_n\in A_n)\\
=&\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X_k)\\
=&\mathbb{P}(X_1\in A_1,\cdots,X_i\in A_i)\prod_{k=i+1}^{n}\mathbb{P}(X_k\in A_k)\\
=&\mathbb{P}(X\in A)\prod_{k=i+1}^{n}\mathbb{P}(X_k)
\end{aligned}$$

[*4] 自然数全体の部分集合は必ず最小限を持つ

と計算できるから、$A \in \mathcal{L}$ がわかる。したがって $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$ である。よって、π-λ 定理より、

$$\mathcal{L} \supset \sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^i)$$

以上により、$X, X_{i+1}, \cdots, X_n$ は独立であることが分かった。

あとは先の命題を適用すればよい。 □

補題. X, Y, Z, W は独立な r.v. とする。このとき、$(X, Y^n), (XY^2, Z), (XY, ZW), (X^2, Y^2)$ はそれぞれ独立。

証明. 確率変数の独立性は合成によって保たれることに注意する。

(X, Y^n) に関しては、

$$\begin{aligned} f &\colon x \mapsto x \\ g &\colon x \mapsto x^n \end{aligned}$$

として、$X = f(X), Y^n = g(Y)$ と見る。

(XY^2, Z) に関しては、

$$\begin{aligned} f &\colon (x, y) \mapsto xy^2 \\ g &\colon x \mapsto x \end{aligned}$$

として、$XY^2 = f(X, Y), Z = g(Z)$ として見る。

(XY, ZW) に関しては、

$$f \colon (x, y) \mapsto xy$$

として $XY = f(X, Y)$ とみれば、XY, Z, W は独立。もう一度 $ZW = f(Z, W)$ とみれば、XY, ZW は独立。

(X^2, Y^2) に関しては、

$$f \colon x \mapsto x^2$$

として $X^2 = f(X), Y^2 = f(Y)$ として見る。 □

4.2 73 ページ下から 3 行目

まあ明らかなんだけど、さすがにそのまま引き算して証明できるほど明らかではない。

$1_{\{|X-\mu|>c\}}$ を考えよう。

$$\mathbb{P}(|X - \mu| > c) = \mathbf{E}[1_{\{|X-\mu|>c\}}]$$

であり、

$$1_{\{|X-\mu|>c\}} < \frac{(X-\mu)^2}{c^2}$$

が成立することに注意すると、両辺を積分して、

$$\begin{aligned}\int 1_{\{|X-\mu|>c\}} d\mathbb{P} &\leq \int \frac{(X-\mu)^2}{c^2} d\mathbb{P} \\ \mathbb{P}(|X-\mu|>c) &\leq \frac{1}{c^2}\mathbf{E}[(X-\mu)^2] \\ c^2\mathbb{P}(|X-\mu|>c) &\leq \mathbf{E}[(X-\mu)^2] = \mathrm{Var}(X)\end{aligned}$$

4.3 74 ページ (a) の 2 行上

f が有界なのは f が閉区間上の連続関数だから。位相空間でよくあるお話だけどただ単に「f は有界である」と書かれるのはちょっと…。

5 Chapter 8

眠いし疲れたので明日。なんか書かなきゃいけないことあったはずなんだけど、ちょっと忘れたよ。

6 Chapter 9

6.1 $\mathbf{E}[X;G]$ という書き方について

Chapter 5 で実は定義されています。

$$\mathbf{E}[X;G] := \int X1_G d\mathbb{P} = \int_G X d\mathbb{P}$$

6.2 条件付き期待値の別の書き方について

積分の形での定義を、指示関数 (定義関数) を使って書き換えたものが次の書き方。

定義 6.1. Y が X の $\mathcal{G}$ での条件付き期待値であるとは、任意の $G \in \mathcal{G}$ に対して次が成立すること。

$$\mathbf{E}[X1_G] = \mathbf{E}[Y1_G]$$

が成り立つこと。

これは次のように書き換えられる。

定義 6.2. Y が X の $\mathcal{G}$ での条件付き期待値であるとは、任意の上に有界な非負の $\mathcal{G}$-可測関数 Z に対して次が成立すること。

$$\mathbf{E}[XZ] = \mathbf{E}[YZ]$$

が成り立つこと。

後者の定義から前者の定義が導かれるのは自明。前者の定義から後者の定義を導く。(Z_n) は Z に各点収束する単調増加な単関数の列とする。単関数は指示関数の有限個の和で表すことができるから、

$$\mathbf{E}[XZ_n] = \mathbf{E}[YZ_n]$$

が成り立つ。したがって、

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[XZ_n] = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[YZ_n]$$

が成り立つ。単調収束定理より、

$$\mathbf{E}[\lim_{n\to\infty} XZ_n] = \mathbf{E}[\lim_{n\to\infty} YZ_n]$$
$$\mathbf{E}[XZ] = \mathbf{E}[YZ]$$

がなりたつ。(XZ_n, YZ_n がそれぞれ単調増加な可測関数列である。)

6.3　86 ページ 3 行目

$$\{Y > \tilde{Y} + \frac{1}{n}\} \uparrow \{Y > \tilde{Y}\}$$

とは、

$$\bigcup_n \{Y > \tilde{Y} + \frac{1}{n}\} = \{Y > \tilde{Y}\}$$

よって、

$$\sum_n \mathbb{P}(Y > \tilde{Y} + \frac{1}{n}) \geq \mathbb{P}\left(\bigcup_n \{Y > \tilde{Y} + \frac{1}{n}\}\right) \geq \mathbb{P}(Y > \tilde{Y}) > 0$$

であることに注意する。

6.4　86 ページ下から 6 行目

almost surelyで Y_n が非負かつ、n に関して単調増加であることを示すことに気を付ける。

6.4.1　$0 \leq Y_n$(a.s.) について

$F := \{Y_n < 0\}$ について考える。Y_n は $\mathcal{G}$ 可測なので、F は $\mathcal{G}$ 可測集合となる。Y_n が X_n の条件付き期待値であることと、非負の可測関数を確立測度で積分するとその値は非負になることに気をつければ、以下のように計算することができる。

$$\int_F Y_n d\mathbb{P} = \int_F X_n d\mathbb{P} \geq 0$$

一方、

$$\int_F Y_n d\mathbb{P} = \int_\Omega Y_n 1_F d\mathbb{P}$$

だから、

$$\int_\Omega Y_n 1_F d\mathbb{P} \geq 0$$

となる。さて、

$$Y_n 1_F(\omega) \leq 0 \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

だから、

$$\int_\Omega Y_n 1_F d\mathbb{P} \leq 0$$

よって、

$$\int_\Omega Y_n 1_F d\mathbb{P} = 0$$

これから、

$$\int_\Omega -Y_n 1_F d\mathbb{P} = 0$$

51 ページの Lemma(b) を用いると

$$\mathbb{P}(F) = 0$$

が分かる。

6.4.2 $Y_n \uparrow$(a.s.) について

前小小節とほぼ同じ。$s < r$ として、$G := \{Y_s > Y_r\}$ 上で X_s, X_r をそれぞれ積分する。そしてそれらを引き算する。

6.5 86 ページ下から 3 行目 $Y_n \uparrow Y$(a.s) について

上極限の扱い分かってない人みたいになった。

各点収束することを示すから、$\omega \in \Omega$ を一つ固定する。

6.5.1 $\limsup_{n\to\infty} Y_n(\omega) = \infty$ のとき

$$\limsup_{n\to\infty} Y_n(\omega) = \inf_{n\geq 1} \sup_{\nu \geq n} Y_\nu(\omega)$$

である (定義)。見やすさのために、新たに

$$a_n = \sup_{\nu\geq n} Y_\nu(\omega)$$

とおく。すると、

$$\inf_{n\geq 1} a_n$$

となる。探索範囲が狭まっているので a_n は単調減少列であることに注意する。仮定より、

$$\inf_{n\geq 1} a_n = \infty$$

だから、

$$a_n = \infty \quad (\forall n)$$

つまり、とりわけ $n = 1$ に関して

$$\sup_{\nu \geq 1} Y_\nu(\omega) = \infty$$

これはつぎのように書ける。

$$\forall K > 0, \exists m \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad Y_m(\omega) > K$$

これは、数列 $(Y_n(\omega))$ が正の無限大に発散することの定義そのものである。したがって、

$$\lim_{n\to\infty} Y_n(\omega) = \infty$$

6.5.2 $\limsup_{n\to\infty} Y_n(\omega) = \alpha < \infty$ のとき

定義より、

$$\limsup_{n\to\infty} Y_n(\omega) = \inf_{n\geq 1} \sup_{\nu \geq n} Y_\nu(\omega)$$

であるが、$Y_n(\omega)$ は n に関する単調増加列なので、各 b_n の値は全て等しい。ただし、

$$b_n = \sup_{\nu \geq n} Y_\nu(\omega)$$

したがって、

$$\inf_{n\geq 1} \sup_{\nu \geq n} Y_\nu(\omega) = \sup_{n\geq 1} Y_n(\omega)$$

つまり、

$$\sup_{n\geq 1} Y_n(\omega) = \alpha$$

であることが分かる。よって、$Y_n(\omega)$ は上限が α の単調増加な数列なので

$$\lim_{n\to\infty} Y_n(\omega) = \alpha$$

6.6 89 ページ (d) の証明について

(9.5.d) の証明を用いればよいと書いてあるが、(9.5.d) の主張を証明するために有界性は用いていない。したがって、(9.5.d) 証明がそのまま (d) の証明になる。

6.7 89 ページ (f),(g) の証明について

いくつかの補題を先に証明する。

6.7.1　補題その 1

補題 6.1. X, Y: 確率変数で、$X \leq Y \quad (a.s)$ とする。このとき、$\mathbf{E}[X \mid \mathcal{G}] \leq \mathbf{E}[Y \mid \mathcal{G}] \quad (a.s.)$

証明. 仮定より、$0 \leq Y - X$ だから、88 ページ (d) より、

$$0 \leq \mathbf{E}[Y - X \mid \mathcal{G}]$$

88 ページ (c) の線形性から、

$$\mathbf{E}[X \mid \mathcal{G}] \leq \mathbf{E}[Y \mid \mathcal{G}]$$

□

6.7.2　補題その 2

補題 6.2 (Reverse cFATOU)**.** $|X_n(\omega)| \leq V(\omega) \, (\forall n), \quad \mathbf{E}[V] < \infty$ であるなら、

$$\mathbf{E}[\limsup_{n\to\infty} X_n|\mathcal{G}] \geq \limsup_{n\to\infty} \mathbf{E}[X_n|\mathcal{G}]$$

証明. $(V - X_n)$ に cFATOU を適用する。

$$\mathbf{E}[\liminf_{n\to\infty}(V - X_n) \mid \mathcal{G}] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}[V - X_n \mid \mathcal{G}]$$

$$\mathbf{E}[V + \liminf_{n\to\infty}(-X_n) \mid \mathcal{G}] \leq \liminf_{n\to\infty}(\mathbf{E}[V \mid \mathcal{G}] + \mathbf{E}[-X_n \mid \mathcal{G}])$$

$$\mathbf{E}[\liminf_{n\to\infty}(-X_n) \mid \mathcal{G}] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}[-X_n \mid \mathcal{G}]$$

$$\mathbf{E}[-\liminf_{n\to\infty}(-X_n) \mid \mathcal{G}] \geq -\liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}[-X_n \mid \mathcal{G}]$$

$$\mathbf{E}[\limsup_{n\to\infty} X_n|\mathcal{G}] \geq \limsup_{n\to\infty} \mathbf{E}[X_n|\mathcal{G}]$$

□

6.7.3　補題その 3

補題 6.3. $|\mathbf{E}[X \mid \mathcal{G}]| \leq \mathbf{E}[|X| \mid \mathcal{G}]$

証明.

$$-\mathbf{E}[|X| \mid \mathcal{G}] \leq \mathbf{E}[X \mid \mathcal{G}] \leq \mathbf{E}[|X| \mid \mathcal{G}]$$

を示せばよい。

右側の不等式は $X \leq |X|$ よりわかる。左側の不等式は $-|X| \leq X$ よりわかる。 □

6.7.4 (f) の証明

$k \in \mathbb{N}$ とする。$n \geq k$ において、$\inf_{n \geq k} X_n \leq X$ が成立する。補題 6.1 より、

$$\mathbf{E}[\inf_{n \geq k} X_n \mid \mathcal{G}] \leq \mathbf{E}[X \mid \mathcal{G}]$$

$n \geq k$ について下限をとると、

$$\mathbf{E}[\inf_{n \geq k} X_n \mid \mathcal{G}] \leq \inf_{n \geq k} \mathbf{E}[X \mid \mathcal{G}]$$

$k \to \infty$ とすると、(cMON) と $\inf_{n \geq k} X_n$ は k に関する単調増加列であることから、主張の式が得られる。

6.7.5 (g) の証明

補題 6.3 より、

$$|\mathbf{E}[X_n - X \mid \mathcal{G}]| \leq \mathbf{E}[|X_n - X| \mid \mathcal{G}]$$

だから、

$$\lim_{n \to \infty} |\mathbf{E}[X_n - X \mid \mathcal{G}]| \leq \lim_{n \to \infty} \mathbf{E}[|X_n - X| \mid \mathcal{G}]$$

$$\leq \limsup_{n \to \infty} \mathbf{E}[|X_n - X| \mid \mathcal{G}]$$

である。ここで補題 6.2 より、

$$\limsup_{n \to \infty} \mathbf{E}[|X_n - X| \mid \mathcal{G}] \leq \mathbf{E}[\limsup_{n \to \infty} |X_n - X| \mid \mathcal{G}]$$

$$= \mathbf{E}[0 \mid \mathcal{G}]$$

したがって、

$$\limsup_{n \to \infty} \mathbf{E}[|X_n - X| \mid \mathcal{G}] = 0$$

よって、はさみちの原理から、

$$\lim_{n \to \infty} |\mathbf{E}[X_n - X \mid \mathcal{G}]| = 0$$

ゆえに、

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{E}[X_n \mid \mathcal{G}] = \mathbf{E}[X \mid \mathcal{G}]$$

6.8 (j) について

(***) にある『適切な可積分条件』とは

$$\mathbf{E}[|ZX|] < \infty$$

のこと。これがないとそもそも条件付き期待値が定義できない。本の証明は $\mathbf{E}[|ZX|] < \infty$ を仮定して、先に (***) の条件を証明している。そのご、各条件に付いて $\mathbf{E}[|ZX|] < \infty$ を満たしているかどうかをチェックしている。

『適切な可積分条件』とかふわふわした書き方しないでよ、分からないでしょ！

6.9 (k) について

6.9.1 証明 1 行目

$\mathbf{E}[X] < \infty$ は条件付き期待値を定義するために必要な条件だから書いてあります。9.7 のリストの最初に $\mathbf{E}[|X|] < \infty$ を仮定すると書いてあるので、それはそう。

6.9.2 証明 2 行目

「XI_G and H are independent」は「XI_G and I_H are independent」のこと。

また、この主張は $\sigma(XI_G) \subset \sigma(\sigma(X), \mathcal{G})$ と $\sigma(I_H) \subset \sigma(\mathcal{H})$ を示せばよい。これが示されれば、

$$A \in \sigma(XI_G) \Rightarrow A \in \sigma(\sigma(X), \mathcal{G})$$

$$B \in \sigma(I_H) \Rightarrow B \in \sigma(\mathcal{H})$$

が分かるので、$\sigma(\sigma(X), \mathcal{G})$ と $\sigma(\mathcal{H})$ が独立であるという仮定を利用すればよい。

$\sigma(XI_G) \subset \sigma(\sigma(X), \mathcal{G})$ は、X は $\sigma(X)$ 上可測であり、I_G は $\mathcal{G}$ 上可測だから、それぞれ $\sigma(\sigma(X), \mathcal{G})$ 可測である。よって、XI_G は $\sigma(\sigma(X), \mathcal{G})$ 上で可測。したがって、$\sigma(XI_G) \subset \sigma(\sigma(X), \mathcal{G})$。もう一個もおんなじ感じやで。

6.9.3 4 行目

Y は $\mathcal{G}$ 可測だから、YI_G も $\mathcal{G}$ 可測で、ゆえに、$\sigma(YI_G) \subset \mathcal{G} \subset \sigma(\sigma(X), \mathcal{G})$ より、$\sigma(YI_G)$ と $\sigma(I_H)$ は独立。

6.9.4 10 行目

この書き方嫌い。例えば次のように書けば見やすいのでは?

二つの写像、μ_1, μ_2 を次のように定義する。

$$\mu_1 \colon \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \to \mathbb{R}$$

という写像で、$\mu_1(F) = \mathbf{E}[X; F]$ とする。また、

$$\mu_2 \colon \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \to \mathbb{R}$$

という写像で、$\mu_2(F) = \mathbf{E}[Y; F]$ とする。

6.9.5　11 行目

ここの書き方も嫌い。記号を使った方が分かりやすいと思う...

$$\mathcal{I} := \{G \cap H \mid G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}\}$$

とすると、μ_1, μ_2 が $\mathcal{I}$ 上で一致する。
てな感じで書いてくれないと英語読めない人死亡する。

6.9.6　12 行目

”... and hence agree everywhere on $\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})$” じゃねえんだよな。使った補題くらい明記しとけや。

$\sigma(I) = \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ より、19 ページの補題から、μ_1, μ_2 は $\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ で一致する。

くらいはせめて言葉を尽くして欲しかった。

6.9.7　後半の主張

これ前半の主張の式使って証明できるの？

Y を $\mathbf{E}[X \mid \mathcal{H}]$ の一変形とする。$H \in \mathcal{H}$ を任意にとる。

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Y; H] &= \mathbf{E}[X; H] \\
&= \mathbf{E}[X I_H] \\
&= \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[I_H] \\
&= \int_H \mathbf{E}[X] d\mathbb{P} \\
&= \mathbf{E}[\mathbf{E}[X]; H]
\end{aligned}$$

より、$\mathbf{E}[X \mid \mathcal{H}] = \mathbf{E}[X]$ が言える。なお、この計算の途中で X, I_H が独立であることを用いた。

6.10　9.9 節について

6.10.1　(a) の式の証明

これくらいの行間なら許せる。

証明.

$$G_n = \sum_{k=1}^{n} I_{F_k}$$

とする。(F_n) は disjoint な集合の列だから、(G_n) は単調増加な非負の関数列である。

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \mid \mathcal{G}\right) &= \mathbf{E}[I_{\sum_n F_n|\mathcal{G}}] \\ &= \mathbf{E}[\lim_{n\to\infty} G_n \mid \mathcal{G}] \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[G_n \mid \mathcal{G}] \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}[I_{F_k} \mid \mathcal{G}] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}[I_n \mid \mathcal{G}] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_n \mid \mathcal{G})\end{aligned}$$

ただし、この計算の途中で (cMON) および (cDOM) を用いている。 □

6.10.2 $P(\cdot,\cdot)$ の存在を (a) から言うことができないことについて

お前は許せないタイプの行間。

すこし論理記号を用いて書くとするならば、以下のような感じになるだろう。[*5][*6]

$$\forall (F_n) : \text{disjoint} \quad [\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \mid \mathcal{G}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_n \mid \mathcal{G}) \text{ が } (a.s.) \quad \text{で成り立つ。}]$$

すなわち、(F_n) を固定するごとに、上記の等式が成り立たないような零集合が存在する。確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ が簡単なものではない場合、つまり、$\mathcal{F}$ が有限だったり、可算集合でない場合、$\mathcal{F}$ 上の disjoint な集合列は非可算個存在する。そこで、そのような零集合を $N_{(F_n)}$ と書くことにする。

$$N := \bigcup_{(F_n)} N_{(F_n)}$$

と定める。$\mathcal{F}$ 内の (F_n) をすべて動かしたときの $N_{(F_n)}$ の和集合である。N は (b2) が成り立たない集合である。しかし、これはそもそも可測ではないかもしれないし、可測であったとしても零集合の非可算個の和集合なので、その測度は 0 よりも大きくなりえる。だから、$P(\cdot,\cdot)$ の存在を (a) から言うことができないのである。

6.10.3 正則条件付き確率が存在することの必要十分条件 (?) について

D. L AO, M. FRAGOSO and P. RUFFINO らによる 2003 年の論文[*7](最近だな！) にいろいろ情報が書かれてあった。(まだ読んでないですが)

[*5] LaTeX がなんかいい感じに書けなかった。

[*6] ここで大切なのは (F_n) が $\mathbb{P}$ のカッコの中にないということ。

[*7] https://scielo.conicyt.cl/pdf/proy/v23n1/art02.pdf

6.11 9.10 について

6.11.1 91 ページ (b) の式について

$\gamma^h(X_1)$ は X_1 を一つ決め打ちした時の h の期待値。$\mathbf{E}[h(X_1, X_2, \cdots, X_r) \mid X_1]$ は $\sigma(X_1)$ という条件が付いたときの h の期待値。これらの二つが実は同じ[*8]ですよ〜って意味。

6.11.2 (c) が成り立てば証明できたことになる？

主張の式を確認するためには、任意の $G \in \sigma(X_1)$ に対して、

$$\mathbf{E}[\gamma^h(X_1)I_G] = \mathbf{E}[h(X_1, \cdots, X_r)I_G]$$

を示せばよい。しかし、$\sigma(X_1) = \{X_1^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ であることを以前に証明している[*9]。したがって、$G = X_1^{-1}(B)$ となる $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ が存在する。よって、

$$I_G = I_{X_1^{-1}(B)}$$

である。ここで右辺は

$$I_{X_1^{-1}(B)} = I_B(X_1)$$

だから、(c) の式を確認できれば主張の式を証明できたことになる。

6.11.3 Fubini での証明について

68 ページの補題を $h\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ というボレル可測関数 h に対して使っている。2 行目で Fubini の定理を用いている。

$$\begin{aligned}
((\text{c}) \text{ の左辺}) &= \int_{x\in\mathbb{R}^r} h(x)I_B(x_1)(\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \cdots \Lambda_r)(dx) \\
&= \int_{x_1\in\mathbb{R}} \int_{y\in\mathbb{R}^{r-1}} h(x_1, y)I_B(x_1)(\Lambda_2 \times \cdots \Lambda_r)(dy)\Lambda_1(dx_1) \\
&= \int_{x_1\in\mathbb{R}} \int_{y\in\mathbb{R}^{r-1}} h(x_1, y)(\Lambda_2 \times \cdots \Lambda_r)(dy)I_B(x_1)\Lambda_1(dx_1) \\
&= \int_{x_1\in\mathbb{R}} \gamma^h(x_1)I_B(x_1)\Lambda_1(dx_1) \\
&= \mathbf{E}[\gamma^h(X_1)I_B(X_1)]
\end{aligned}$$

この証明独立性使ってるのかよくわかんないんだけど。

[*8] 「同じ」と言ってしまうと語弊があるけど...

[*9] 36 ページ exercise

6.11.4 単調族定理での証明

もうちょい式を使って書いてくれって思った。

$$\mathcal{H} := \{h \in b\mathcal{B}^r \mid h \text{ は (c) を満たす。}\}$$

まず以下のことを示す。

- $\mathcal{H}$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間
- 定数関数 1 は $\mathcal{H}$ に含まれる
- $\mathcal{H}$ の非負関数列 (f_n) が有界関数 f に収束するなら、$f \in \mathcal{H}$

最初の二つは多分計算できるので実際に書いてみるとよいでしょう。三つめも多分計算できます。lim を交換するときに (DOM) を使うことに注意しよう。

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\gamma^f(X_1)I_B(X_1)] &= \mathbf{E}[\mathbf{E}[f(X_1, X_2, \cdots X_r)]I_B(X_1)] \\
&= \mathbf{E}[\mathbf{E}[\lim_{n\to\infty} f_n(X_1, X_2, \cdots X_r)]I_B(X_1)] \\
&= \mathbf{E}[\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[f_n(X_1, X_2, \cdots X_r)]I_B(X_1)] \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[\mathbf{E}[f_n(X_1, X_2, \cdots X_r)]I_B(X_1)] \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[f_n(X_1, X_2, \cdots X_r)I_B(X_1)] \\
&= \mathbf{E}[\lim_{n\to\infty} f_n(X_1, X_2, \cdots X_r)I_B(X_1)] \\
&= \mathbf{E}[f(X_1, X_2, \cdots X_r)I_B(X_1)]
\end{aligned}$$

$\mathcal{B}^r$ はもちろん π-system です。また、$\sigma(\mathcal{B}^r) = \mathcal{B}^r$ です。よって、次を示せば単調属定理を用いると証明が完了します。

- $\mathcal{H}$ は $\mathcal{B}^r$ のすべての定義関数を含んでいる。

$A \in \mathcal{B}^r$ とする。$A_1, A_2, \cdots, A_r \in \mathcal{B}^r$ があって、$A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r$ と書けます。

$$\begin{aligned}
\text{(c) の右辺} &= \mathbf{E}[\gamma^{I_A}(X_1)I_B(X_1)] \\
&= \mathbf{E}[\mathbf{E}[I_A(X_1, X_2, \cdots, X_r)]I_B(X_1)] \\
&= \mathbf{E}[\mathbf{E}[1; A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r]I_B(X_1)] \\
&= \mathbf{E}[(\Lambda_1 \times \Lambda_2 \cdots \times \Lambda_r)(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r)I_B(X_1)] \\
&= (\Lambda_1 \times \Lambda_2 \cdots \times \Lambda_r)(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r)\mathbf{E}[I_B(X_1)]
\end{aligned}$$

です。一方 $X_1, \cdots, X_r$ が独立であったことに気を付ければ (2 行目で使っている) 左辺は次のように計算できます。

$$\begin{aligned}
\text{(c) の左辺} &= \mathbf{E}[I_A(X_1, X_2, \cdots, X_r)I_B(X_1)] \\
&= \mathbf{E}[I_A(X_1, X_2, \cdots, X_r)]\mathbf{E}[I_B(X_1)] \\
&= (\Lambda_1 \times \Lambda_2 \cdots \times \Lambda_r)(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r)\mathbf{E}[I_B(X_1)]
\end{aligned}$$

6.12　9.11 について

この節のタイトルが"Use of symmetry: an example" なんだから、対称性を使ったところは分かるように明記しておいてほしいと思いました。さりげなく使わないで。いや、まあ確かによく考えたらわかるけど。わかるけどさ...

6.12.1　3 行目

$$\sigma(S_n, S_{n+1}, \cdots) = \sigma(S_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots)$$

について。

証明. ($\subset$ について)
$m > n$ とする。

$$S_m = S_n + \sum_{k=n+1}^{m} X_k$$

と表されるから、S_m は右辺で可測。
　($\supset$ について)
$m > n$ とする。

$$X_m = S_m - S_{m-1}$$

だから、X_m は左辺で可測。 □

6.12.2　6 行目

$$\sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots), \sigma(X_1, S_n)$$

が独立なこと。

証明. $\sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots)$ と $\sigma(X_1, \cdots, X_n)$ が独立であることを示せばよい。ところが、これは 4 章の 0-1 法則で証明済み。 □

6.12.3　9 行目

$$\mathbf{E}[X_1 \mid \mathcal{G}] = \mathbf{E}[X_1 \mid S_1]$$

について。

証明.

$$\sigma(X_1, S_n) = \sigma(\sigma(X_1), \sigma(S_n))$$

より、$\sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots)$ と $\sigma(\sigma(X_1), \sigma(S_n))$ は独立。よって (9.7.k) より、

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X_1 \mid \mathcal{G}] &= \mathbf{E}[X_1 \mid \sigma(S_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots)] \\
&= \mathbf{E}[X_1 \mid \sigma(\sigma(S_n), \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots))] \\
&= \mathbf{E}[X_1 \mid \sigma(S_n)]
\end{aligned}$$

□

6.12.4 12 行目からの計算

$\pi_i \colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ を第 i 成分への射影とする。B は $\mathcal{B}$ の任意の元である。

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X_1; S_n \in B] \quad &= \mathbf{E}[\pi_1(X_1, X_2, \cdots, X_r); S_n \in B] \\
&= \int_{s_n \in B} x_1 (\Lambda \times \Lambda \times \cdots \times \Lambda)(dx) \\
&= \int \cdots \int_{s_n \in B} x_1 \Lambda(dx_1)\Lambda(dx_2) \cdots \Lambda(dx_r) \\
&= \int \cdots \int_{s_n \in B} x_2 \Lambda(dx_2)\Lambda(dx_1) \cdots \Lambda(dx_r) \\
&= \mathbf{E}[\pi_2(X_1, X_2, \cdots, X_r); S_n \in B] \\
&= \mathbf{E}[X_2; S_n \in B]
\end{aligned}$$

3 行目から 4 行目の変形で対称性を用いた。(x_1, x_2 を入れ替えても変わらない。)

6.12.5 結局何が分かった

条件付き期待値でも大数の法則みたいなの成り立ってるよね！

7 Chapter 10

7.1 10.1

7.1.1 6 行目

$\mathcal{F}_\infty$ の定義に、σ が付いているのは、$\bigcup_n \mathcal{F}_\infty$ だけではダメ。例えば、

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{a, b, c\} \\
\mathcal{F}_1 &= \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \Omega\} \\
\mathcal{F}_2 &= \{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, \Omega\}
\end{aligned}$$

とおく。$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ は当然 σ-alg. であるが、$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ は σ-alg. にならない。

7.2 10.2

7.2.1 気を付けておきたいこと

adopted process においては X_{n+1} が $\mathcal{F}_n$ 可測かどうかはわからない。一方、$s < t$ ならば $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ だから、X_s は $\mathcal{F}_t$ 可測であることは分かる。

7.3 10.3

7.3.1 94 ページ下から 14 行目

本文では"It is important to note that ..."とかいてあるところ。主張を改めて書いておくと次のようになる。この主張、本に証明全くないのウケる。

命題. $X_0 \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ であるような過程 X がある。この X がマルチンゲールであることと、過程 $(X - X_0)$ がマルチンゲールであることは同値。

証明. X はマルチンゲールと仮定する。X_n, X_0 はともに $\mathcal{F}_n$ 可測だから、$X_n - X_0$ は $\mathcal{F}_n$ 可測。よって、$(X - X_0)$ は adopted process。$n \geq 1$ に対して、

$$|X_n - X_0| \leq |X_n| + |X_0|$$

より (三角不等式)、

$$\mathbf{E}[|X_n - X_0|] \leq \mathbf{E}[|X_n|] + \mathbf{E}[|X_0|] < \infty$$

だから (右側の不等式は X がマルチンゲールであることからわかる)、$X_n - X_0$ は可積分。そして、$n \geq 1$ に対して X_0 は $\mathcal{F}_{n-1}$ 可測であることに注意すると、

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X_n - X_0 \mid \mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbf{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] - \mathbf{E}[X_0 \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= X_{n-1} - X_0\end{aligned}$$

よって、$X - X_0$ はマルチンゲール。

一方、$X - X_0$ がマルチンゲールだと仮定する。$X_n - X_0$ および X_0 は $\mathcal{F}_n$ 可測であり、

$$X_n = X_n - X_0 + X_0$$

なので、X_n は $\mathcal{F}_n$ 可測。したがって、X は adopted process である。

$$\infty > \mathbf{E}[|X_n - X_0] \geq \mathbf{E}[|X_n] - \mathbf{E}[|X_0|]$$

なので、$X_0 \in \mathcal{L}^1$ より

$$\mathbf{E}[|X_n|] \leq \mathbf{E}[|X_0] + \mathbf{E}[|X_n - X_0] < \infty$$

が分かる。よって、各 X_n は可積分。$\mathbf{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbf{E}[X_n - X_0 + X_0 \mid \mathcal{F}_{n-1}]$ より、先ほどと似たような計算を経ることにより、

$$\mathbf{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1}$$

がわかる。よって X はマルチンゲールである。 □

7.4 10.4

7.4.1 (a) の例について

マルチンゲールの 3 つ目の条件は本に書いてある通り。しかし、一つ目と二つ目の条件の確認は省略されているのでちゃんとしておこう。とはいえ、簡単で、(S_n) が adopted process なことは、今回の filtration の定義から明らか。$\mathbf{E}[|S_n|] < \infty$ であることは、$\mathbf{E}[|X_n|] < \infty$ という仮定から明らか。

7.4.2 (b) の例について

(9.7.j) を用いているが、ちゃんと使えるか条件を確認しておかないといけない。その条件は、

$$X \in (m\mathcal{F})^+,\ Z \in (m\mathcal{G})^+,\ \mathbf{E}[X] < \infty,\ \mathbf{E}[ZX] < \infty$$

ここで、$\mathcal{F}$ とは、確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の $\mathcal{F}$ で、$\mathcal{G}$ とは $\mathcal{F}$ の部分 σ-alg. のこと。(b) の場合だと、X に相当するものが X_n、Z に相当するものが、M_{n-1} である。だから、

$$X_n \in (m\mathcal{F})^+,\ M_{n-1} \in (m\mathcal{G})^+,\ \mathbf{E}[X_n] < \infty,\ \mathbf{E}[M_{n-1}X_n] < \infty$$

を確認すればよい。

7.4.3 気づいたこと

(a),(b) はそれぞれ環の加法単位元と乗法単位元に対応してる感じがあった。平均が 0 というのは環の加法の演算においては 0 が単位元であることに対応してて、平均が 1 というのは (非負という条件も付くが)、環の乗法の置いては 1 が単位元であることに対応してそう。

マルチンゲールがそうやって代数とつながってるのかは分かんないね。今回だけの偶然かもしれない。

7.4.4 (c) の例について

なんかもうここまで adopted process と可積分性確認されないのおもろいな。(なんもおもろくないが (ちゃんと書けや))

$$\begin{aligned}|\mathbf{E}[\xi \mid \mathcal{F}_n]| &= |\mathbf{E}[\xi^+ - \xi^- \mid \mathcal{F}_n]| \\ &= |\mathbf{E}[\xi^+ \mid \mathcal{F}_n] - \mathbf{E}[\xi^- \mid \mathcal{F}_n]| \\ &\le |\mathbf{E}[\xi^+ \mid \mathcal{F}_n]| + |\mathbf{E}[\xi^- \mid \mathcal{F}_n]|\end{aligned}$$

だから、

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[|M_n|] &\le \mathbf{E}[|\mathbf{E}[\xi^+ \mid \mathcal{F}_n]| + |\mathbf{E}[\xi^- \mid \mathcal{F}_n]|] \\
&= \mathbf{E}[\mathbf{E}[\xi^+ \mid \mathcal{F}_n]] + \mathbf{E}[\mathbf{E}[\xi^- \mid \mathcal{F}_n]] \\
&= \mathbf{E}[\xi^+] + \mathbf{E}[\xi^-] \\
&= \mathbf{E}[\xi^+ + \xi^-] \\
&= \mathbf{E}[|\xi|] < \infty \quad (\xi \in \mathcal{L}^1)
\end{aligned}$$

7.5　10.5

とくにないです。

7.6　10.6

英語が微妙にわからないやつ。

”Your winnings on game n are $C_n(X_n - Xn - 1)$ and ...” はおそらく、「第 n ゲーム終了時にもらえるお金は”$C_n(X_n - Xn - 1)$” (これは負の数[*10]も含めて考えている) であるとすると」という意味だと思われる。

7.7　10.7

ここの証明もサラッとしか書かれていないな？もっと丁寧に言ってくれないと僕ちゃん見落としちゃうぞ？

7.7.1　(i) の証明の補完

$C_n\mathbf{E}[X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}] \le 0$ は、C_n が非負で、submartingale であることと (9.7.b) から、

$$\mathbf{E}[X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}] \le X_{n-1} - X_{n-1} = 0$$

と計算できるから。また、$(C \bullet X)$ が adopted process であることについては、C_{n-1} は $\mathcal{F}_{n-2}$ 可測であり、filtration の定義から C_{n-1} は $\mathcal{F}_{n-1}$ 可測でもある。可積分性については、次のように

[*10] もらえるお金が負の数ということは、お金を失ったということ

計算できる。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}[|Y_n|] &= \mathbf{E}[|\sum_{k=1}^{n} C_k(X_k - X_{k-1})|] \\
&\leq \mathbf{E}[\sum_{k=1}^{n} |C_k(X_k - X_{k-1})|] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}[|C_k(X_k - X_{k-1})|] \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}[|C_k X_k| + |C_k X_{k-1}|] \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{E}[K|X_k|] + \mathbf{E}[K|X_{k-1}|]) < \infty
\end{aligned}
$$

なお、ここで 1 行目から 2 行目は三角不等式を用いている。3 行目から 4 行目は $|a-b| \leq |a| + |b|$ を用いている。4 行目から 5 行目は process C が有界だから $C_k < K$ と一様に上から押さえられていることを用いている。5 行目の $< \infty$ は、各 X_k が可積分であることを用いている。

7.7.2 (ii) の証明の補完

C_n が非負であることは submartingale の時に用いた。(i) の証明で martingale の時の証明をそのまま流用すればよい。

7.7.3 (iii) の証明の補完

(9.7.j) を用いるための条件として、

$$
p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ X \in \mathcal{L}^p,\ Z \in \mathcal{L}^q
$$

があった。今回は $p = q = 2$ の場合。他は同様。可積分性は、$X_k \in \mathcal{L}^2$ より、$X_k \in \mathcal{L}^1$ なので、$\mathbf{E}[|Y_n|] < \infty$ がわかる。

7.8 10.8

7.8.1 L が stopping time ではないかもしれないこと

例えば $L = 6$ という集合は次のように考えられる。$n < 6$ の時は、$A_n \in B$ であることはどうでもよい。$n \geq 7$ の時は $A_n \notin B$ であることが必要である。したがって、次にように考えることができる。

$$
\begin{aligned}
\{L = 6\} &= \{A_6 \in B,\ A_7 \notin B,\ \cdots,\ A_{10} \notin B\} \\
&= \{A_6 \in B\} \cap \{A_7 \notin B\} \cap \cdots \cap \{A_{10} \notin B\} \in \mathcal{F}_6 \quad (???)
\end{aligned}
$$

$\{L=6\} \in \mathcal{F}_6$ ならば L は stopping time となる。しかしながら、A は adopted process だから A_7 は $\mathcal{F}_6$ 可測関数かどうかまでは分からない。ということは、

$$\{A_7 \notin B\} \in \mathcal{F}_6$$

かどうかは判断がつかない。(これは A_8, A_9, A_{10} も同様) したがって、L は stopping time であるとは断言することができない。本文で "unless A is freaky" とカッコ付けで書かれているのは、「A が極端な過程なため、L が stopping time になってしまうような場合を除けば」というニュアンス。

7.9 10.9

7.9.1 $(C^{(T)} \bullet X)_n = X_{T\wedge n} - X_0$ なこと

場合分けをして考える。しかし、T そのものは写像なので単に「$T<n$ の場合」とすることはできない[*11]。まず初めに $\omega \in \Omega$ を一つ固定して、

1. $T(\omega) < n$ の場合
2. $T(\omega) \geq n$ の場合

として計算よう。

7.9.2 $\mathbb{Z}$ 上の simple random walk が martingale

丁寧に書くところと書かないところの差が激しくないですか？

定義 ($\mathbb{Z}$ 上の simple random walk)**.** $(\xi_i)_{i\leq 1}$ は $i.i.d$ の独立な $\{-1,1\}$-値確率変数とする。任意の ξ_i について、

$$\mathbb{P}(\xi_i = 1) = \mathbb{P}(\xi_i = -1) = \frac{1}{2}$$

とする。確率変数列 $(X_n)_{n\geq 0}$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} &X_0 := 0 \\ &X_{n+1} = X_n + \xi_{n+1} \end{aligned}$$

確率過程 $(X_n)_{n\geq 0}$ を $\mathbb{Z}$ 上の simple random walk という。

X を $\mathbb{Z}$ 上の simple random walk とする。X は martigale になる。martingale であることを示すためには filtraion が必要である。今回の filtration は natural filtration 、すなわち、

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \cdots, X_n)$$

[*11] こうしてしまうと「T は上に有界」という主張になってしまう。

である。simple random walk の定義から、

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_n &= \sigma(X_0, X_1, \cdots, X_n) \\ &= \sigma(0, \xi_1, \cdots, \xi_n) \\ &= \sigma(\xi_1, \cdots, \xi_n)\end{aligned}$$

である。

X は natural filtration の定義から adopted process である。各 n に対して

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \leq n$$

だから、

$$\mathbf{E}[|X_n|] < \infty$$

である。最後に、

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbf{E}[X_n + \xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbf{E}[X_n \mid \mathcal{F}_n] + \mathbf{E}[\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \\ &= X_n + \mathbf{E}[\xi_{n+1}] \\ &= X_n + 1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} \\ &= X_n\end{aligned}$$

したがって、X は martingale である。

7.10 10.10

ここひどい。X_T の定義が書かれていないので何とも議論ができない。$T(\omega) < \infty$ のときは問題なく定義できるでしょうが、$T(\omega) = \infty$ のとき、つまり X_∞ の定義が書かれていない。[*12]それ以外にも抜けているところが多いので、証明をすべて書いていきます。

7.10.1 almost surely と almost everywhere (再確認)

この本によると、これらの二つは微妙に定義が異なります。

$\omega \in \Omega$ ごとに真偽が決まる命題 $P(\omega)$ がある。単に P と略記する。P が Ω 上 almost everywhere で成立するとは、P が成立しない集合が可測集合かつ、その測度が 0 であること。

P が Ω 上 almost surely で成立するとは、P が成立する集合の測度 (確率) が 1 であること。

前者は全ての測度空間において定義できる概念で、後者は確率論専用の概念です。すなわち、almost surely というのは確率空間があるときにのみ導入できる概念です。

[*12] Chapter 11 のマルチンゲールの収束定理を見れば定義が分かるかもしれないが、それをするなら先にその収束定理をかけよ。

7.10.2　証明

証明. (a) の証明。

[準備] 仮定より、$(X_{T\wedge n})$ は supermartingale になるから、各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、$X_{T\wedge n}$ は可積分である。また、10.9 の定理より、

$$\mathbf{E}[X_{T\wedge n}] \leq \mathbf{E}[X_0]$$

がすべての $n \in \mathbb{N}$ について成立している。

[(i) が成り立つ場合] T は有界なので、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して、$T(\omega) \leq N$ となる。よって、$X_{T\wedge N} = X_T$ となる。したがって、

$$\mathbf{E}[X_T] = \mathbf{E}[X_{T\wedge N}] \leq \mathbf{E}[X_0]$$

また、$|X_{T\wedge n}| = |X_T|$ より、X_T は可積分であることが分かる。

[T が finite (a.s) ならば $\lim_{n\to\infty} X_{T\wedge n} = X_T$(a.s) であること] $\omega \in \{T < \infty\}$ ならば明らかに $\lim_{n\to\infty} X_{T(\omega)\wedge n}(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$ そして、T finite (a.s) なので、$\mathbb{P}(\{T < \infty\}) = 1$ である。さて、$\{\omega \mid \lim_{n\to\infty} X_{T(\omega)\wedge n}(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)\}$ は「可測集合」であるが[*13]、

$$\{T < \infty\} \subset \{\omega \mid \lim_{n\to\infty} X_{T(\omega)\wedge n}(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)\}$$

であるから、測度の単調性より、

$$\mathbb{P}(\{\omega \mid \lim_{n\to\infty} X_{T(\omega)\wedge n}(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)\}) = 1$$

となる。

[(ii) が成立しているとき] 先ほどの議論と T は finite (a.s) であるという仮定から

$$\lim_{n\to\infty} X_{T\wedge n} = X_T$$

が almost surely で成立する。また、過程 X は有界より (BDD) を使うことができる。したがって、

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[X_{T\wedge n}] = \mathbf{E}[X_T]$$

がなりたつ。よって、

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X_{T\wedge n}] &\leq \mathbf{E}[X_0] \\
\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[X_{T\wedge n}] &\leq \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[X_0] \\
\mathbf{E}[X_T] &\leq \mathbf{E}[X_0]
\end{aligned}$$

[*13] らしいけど、これまじ？ X_T の定義がないとやっぱ無理ちゃう？

X_T の可積分性は次のように示す。

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[|X_T|] &= \int_{\{T<\infty\}} |X_T|\mathbb{P}(d\omega) + \int_{\{T=\infty\}} |X_T|\mathbb{P}(d\omega) \\ &= \int_{\{T<\infty\}} |X_T|\mathbb{P}(d\omega) + 0 \\ &= \int_{\{T<\infty\}} |X_T|\mathbb{P}(d\omega)\end{aligned}$$

であるが、ここで X が有界であるという仮定と、$\omega \in \{T < \infty\}$ であることから次のような計算ができる。ただし、以下で K とは、X を上から押さえている定数。

$$\begin{aligned}|X_{T(\omega)\wedge n}(\omega)| &\leq K \\ \lim_{n\to\infty} |X_{T(\omega)\wedge n}(\omega)| &\leq K \\ |X_{T(\omega)}(\omega)| &\leq K\end{aligned}$$

したがって、

$$\mathbf{E}[|X_T|] \leq K < \infty$$

よって、X_T は可積分である。

[(iii) が成り立つとき] このとき、T は finite (a.s.) である。これは背理法を用いれば $\mathbf{E}[T] < \infty$ に反していることがすぐにわかる。(iii) の仮定を使えば、

$$|X_{T\wedge n} - X_0| = |\sum_{k=1}^{T\wedge n}(X_k - X_{k-1})| \leq TK$$

ここで K は定数で、$\mathbf{E}[T] < \infty$ より、$\mathbf{E}[TK] < \infty$。よって、(DOM) より。

$$\mathbf{E}[|(X_{T\wedge n}) - X_0) - (X_T - X_0)|] \to 0$$

すなわち、

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[|X_{T\wedge n} - X_T|] &\to 0 \\ \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[X_{T\wedge n}] &= \mathbf{E}[X_T]\end{aligned}$$

よって (ii) と同様に、$\mathbf{E}[X_T] \leq \mathbf{E}[X_0]$ となる。X_T の可積分性は次のように示す。

$$|X_{T\wedge n} - X_0| \geq |X_{T\wedge n}| - |X_0|$$

であり、

$$|X_{T\wedge n} - X_0| \leq TK$$

なので、

$$\begin{aligned}|X_{T\wedge n}| - |X_0| &\leq TK \\ |X_{T\wedge n}| &\leq TK + |X_0| \\ \lim_{n\to\infty} |X_{T\wedge n}| &\leq \lim_{n\to\infty}(TK + |X_0|) \\ |X_T| &\leq TK + |X_0| \\ \mathbf{E}[|X_{T\wedge n}|] &\leq \mathbf{E}[TK + |X_0|] < \infty\end{aligned}$$

以上によりすべての主張を証明できた。

(b) の証明。

X がマルチンゲールだから $-X$ もマルチンゲール。よって (a) を適用すればよい。 □

7.10.3 系について

系 7.1. M はマルチンゲールで、各 n に対して $M_n - M_{n-1}$ は一様に $K_1 \in \mathbb{R}^+$ で押さえられている。すなわち、

$$\exists K_1 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall \omega \in \Omega, |M_n(\omega) - M_{n-1}(\omega)| \leq K_1$$

とする。C は previsible process[*14]で、$K_2 \in \mathbb{R}^+$ で一様に抑えられているとする。T は stopping time で、$\mathbf{E}[T] < \infty$ とする。このとき、$\mathbf{E}[(C \bullet M)_T] = 0$ となる。

証明. M はマルチンゲールで、C は有界な previsible process なので、10.7 節の (b) より、$(C \bullet M)$ は $(C \bullet M)_0 = 0$ であるようなマルチンゲールである。また、

$$|(C \bullet M)_n - (C \bullet M)_{n-1}| = |C_n(M_n - M_{n-1})| \leq K_1 K_2$$

仮定より、

$$\mathbf{E}[T] < \infty$$

よって、任意抽出定理の (iii) の条件を満たしているので、10.10(b) より、

$$\mathbf{E}[(C \bullet M)_T] = \mathbf{E}[(C \bullet M)_0] = \mathbf{E}[0] = 0$$

□

系 7.2. X が非負 supermartingale で T が stopping time で、a.s. で有限であるとする。このとき、

$$\mathbf{E}[X_T] \leq \mathbf{E}[X_0]$$

証明. X が supermartingale より、$\mathbf{E}[X_{T\wedge n}] \leq \mathbf{E}[X_0]$ である。X が非負より、$X_{T\wedge n}$ も非負。また、T は a.s. で有限より、$X_{n\wedge T} \to X_T$ が a.s. で成立する。よって、FATOU の補題より、

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\liminf_{n\to\infty} X_{T\wedge n}] &\leq \liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}[X_{T\wedge n}] \\
\mathbf{E}[X_T] &\leq \liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}[X_0] \\
&= \mathbf{E}[X_0]
\end{aligned}$$

□

[*14] filtration は与えられているものとする

7.10.4　やらかしたミス

せや！

$$X \le Y \Rightarrow \mathbf{E}[X \mid \mathcal{F}] \le \mathbf{E}[Y \mid \mathcal{F}]$$

なんやから、対偶を取ったら

$$\mathbf{E}[X \mid \mathcal{F}] \le \mathbf{E}[Y \mid \mathcal{F}] \Rightarrow X \le Y$$

だから、系 7.2 はこれですぐにしめせるやんけ！w

almost surely が付いた命題の否定命題を考えるときは気をつけましょう。

7.11　10.11

本文には巻末の演習問題集の E10.5 を参考にしなさいと書いてあります。

7.11.1　E10.5 の証明

証明. 帰納法で示す。

$[n=1$ のとき$]$ $\mathbb{P}(T > N) = 1 - \mathbb{P}(T \le N)$ である。$\mathbb{P}(T \le M \mid \mathcal{F}_0)$ は $\mathbf{E}[I_{\{T \le N\}} \mid \mathcal{F}_0]$ の一変形であり、仮定より、

$$\mathbb{P}(T \le N \mid \mathcal{F}_0) > \varepsilon \quad (a.s.)$$

となる $N \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$ が存在する。したがって、

$$-\mathbb{P}(T \le N \mid \mathcal{F}_0) < -\varepsilon \quad (a.s.)$$

である。条件付き平均の定義より、

$$\int_\Omega \mathbb{P}(T \le N \mid \mathcal{F}_0) d\mathbb{P} = \int_\Omega I_{\{T \le N\}} d\mathbb{P} = \mathbb{P}(T \le N)$$

である。したがって、

$$-\varepsilon > \int_\Omega (-\mathbb{P}(T \le N \mid \mathcal{F}_0)) = -\mathbb{P}(T \le N)$$

よって、

$$1 - \mathbb{P}(T \le N) < 1 - \varepsilon$$

すなわち、

$$\mathbb{P}(T > N) < \varepsilon$$

$n = k(\le 1)$ の時成立すると仮定。T は stoppinng time より、

$$\{T \le kN\} \in \mathcal{F}_{kN}$$

したがって、

$$\{T \le kN\}^c = \{T > kN\} \in \mathcal{F}_{kN}$$

ところで、

$$\mathbb{P}(T \le kN + N \mid \mathcal{F}_{kN}) > \varepsilon \quad (a.s.)$$

より、

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}(T \le kN + N \mid \mathcal{F}_{kN}) &< 1 - \varepsilon \quad (a.s.) \\ \mathbb{P}(T > kN + N \mid \mathcal{F}_{kN}) &< 1 - \varepsilon \quad (a.s.) \end{aligned}$$

$\mathbb{P}(T > kN + N \mid \mathcal{F}_{kN})$ は $\mathbf{E}[I_{\{T>kN+N\}} \mid \mathcal{F}_{kN}]$ の一変形であることに注意すれば、

$$\begin{aligned} \int_{T>kN} \mathbb{P}(T > kN + N \mid \mathcal{F}_{kN}) d\mathbb{P} &< \int_{T>kN} (1-\varepsilon) d\mathbb{P} \\ \int_{T>kN} I_{\{T>kN+N\}} d\mathbb{P} &< (1-\varepsilon)\mathbb{P}(T > kN) \\ \int_{\Omega} I_{\{T>kN+N\}\cap\{T>kN\}} d\mathbb{P} &< (1-\varepsilon)(1-\varepsilon)^k \\ \mathbb{P}(\{T > kN + N\} \cap \{T > kN\}) &\le (1-\varepsilon)^{k+1} \\ \mathbb{P}(T > (k+1)N) &\le (1-\varepsilon)^{k+1} \end{aligned}$$

□

7.11.2 $\mathbf{E}[T] < \infty$ の証明

証明.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[T] =& 0 \times \mathbb{P}(T = 0) \\ & + 1 \times \mathbb{P}(T = 1) + 2 \times \mathbb{P}(T = 2) + \cdots + N \times \mathbb{P}(T = N) \\ & + (N+1) \times \mathbb{P}(T = N+1) + (N+2) \times \mathbb{P}(T = N+2) + \cdots + 2N \times \mathbb{P}(T = 2N) \\ & + (2N+1) \times \mathbb{P}(T = 2N+1) + (2N+2) \times \mathbb{P}(T = 2N+2) + \cdots + 3N \times \mathbb{P}(T = 3N) \\ & + (3N+1) \times \mathbb{P}(T = 3N+1) + \cdots \end{aligned}$$

と書けるから、

$$\mathbf{E}[T] \le N\mathbb{P}(0 < T \le N) + 2N\mathbb{P}(N < T \le 2N) + \cdots$$

とできる。ここで、$l = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$\mathbb{P}(lN < T \le (l+1)N) \le \mathbb{P}(lN < T) \le (1-\varepsilon)^l$$

なので、

$$\mathbf{E}[T] \le N\mathbb{P}(0 < T \le N) + \sum_{l=1}^{\infty} (l+1)N(1-\varepsilon)^l$$

とできる。右辺の無限級数は有限の値に収束する。よって $\mathbf{E}[T] < \infty$ □

7.11.3　ABRACADABRA について

ごめんやってない。

7.12　10.12

7.12.1　sech とは

見慣れない記号ですが定義は以下の通り[*15]。

$$\operatorname{sech}\theta = \frac{1}{\cosh\theta}$$

7.12.2　p.102 ▶ について

"Now insisit that $\theta > 0$"の意味は「ここで $\theta > 0$ とする」。これたぶん初めから $\theta > 0$ でやっておけばいいと思った。この条件は後々聞いてくるので必要な条件です。

7.12.3　p.102 ▶ の一行下について

$$\exp(\theta S_{T\wedge n}) \leq e^{\theta}$$

と主張している。これを言うためには

$$S_{T\wedge n} \leq 1$$

を確認しておく必要がある。$T(\omega) < \infty$ の場合と、$T(\omega) = \infty$ の場合に場合分けしてそれぞれ調べる。

その次に、$M^{\theta}_{T\wedge n} < e^{\theta}$ であるのは、すぐ上で確認したように

$$\exp(\theta S_{T\wedge n}) \leq e^{\theta}$$

であることと、$\theta > 0$ より、

$$\operatorname{sech}\theta < 1$$

である[*16]ことよりわかる。

7.12.4　102 ページ下から 9 行目

こう書いていたら分かりやすいと思います。

M^{θ}_{T} を以下のように定める。

$$M^{\theta}_{T}(\omega) = \begin{cases} M^{\theta}_{T(\omega)}(\omega) & (T(\omega) < \infty) \\ 0 & (T(\omega) = \infty) \end{cases}$$

[*15] LaTeX でうまいこと出力するの分からなかったから適当に誤魔化しています。
[*16] 詳しい計算は微分頑張ったらいけるはず。

このとき、

$$\lim_{n\to\infty} M^{\theta}_{T\wedge n} = M^{\theta}_{T}$$

が成立する[*17]。この収束の証明は次の通り。

証明. $\omega \in \{T < \infty\}$ の場合は明らか。$\omega \in \{T = \infty\}$ の場合、

$$\begin{aligned} M^{\theta}_{T\wedge n}(\omega) &= M^{\theta}_{n}(\omega) \\ &= (\operatorname{sech}\theta)^n e^{\theta S_n(\omega)} \\ &\leq (\operatorname{sech}\theta)^n e^{\theta} \\ &\to 0 \quad (n\to\infty) \end{aligned}$$

□

7.12.5　102 ページ下から 6 行目の式の右辺

しれっと $(\operatorname{sech}(\theta))^T$ が出てきているけれど、定義が明記されていないので、エスパー能力を発揮して適切な定義を察してあげないといけません。おそらく次のように解釈するのが自然でしょう。

定義.

$$(\operatorname{sech}\theta)^T = \begin{cases} (\operatorname{sech}\theta)^{T(\omega)} & (T(\omega) < \infty) \\ 0 & (T(\omega) = \infty) \end{cases}$$

こうしてきちんと定義をしておかないと、

$$(\operatorname{sech}\theta)^{\infty}$$

という謎の計算をどう処理するのかわからなくなってしまいます。

なおこのように新しく記号を導入したので、

$$M^{\theta}_{T} = (\operatorname{sech}\theta)^T \exp(\theta S_T)$$

が成立することを確かめておかなければなりません。(この確かめはそこまで難しくない。)

7.12.6　102 ページ下から 3 行目

$\theta \downarrow 0$ としていますが、ここ少し大雑把に書いてある。実際はこのようにしています。

$n \geq 1$ に対して、

$$f_n(\omega) := \left(\operatorname{sech}\frac{1}{n}\right)^{T(\omega)}$$

とさだめ、

$$f(\omega) := I_{\{T<\infty\}}(\omega)$$

[*17] ここでは (a.s.) の意味ではなく、通常の意味での各点収束

と定義する。このとき、f_n は増加列で、すべての $\omega \in \Omega$ について

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$$

が成り立つ。したがって、(MON) を使って、

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[\left(\operatorname{sech}\frac{1}{n}\right)^{T(\omega)}\right] \\ 1 &= \lim \mathbf{E}[f_n] \\ 1 &= \mathbf{E}[\lim f_n] \\ 1 &= \mathbf{E}[f] = \mathbb{P}(T < \infty)\end{aligned}$$

7.12.7　103 ページ (c) の式の一番右辺

強マルコフ性を使わなくてもいけるのでは...。

$$\operatorname{sech}\theta = \alpha$$

を $e^{-\theta}$ について解くと、

$$e^{-\theta} = \frac{1 \pm \sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}$$

と求められるが、いま $\theta > 0$ という条件より、

$$e^{-\theta} = \frac{1 + \sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}$$

はあり得ないことが分かってしまう。

7.12.8　103 ページ上から 6 行目

$\sqrt{1-\alpha^2}$ を一般二項展開しよう。その後係数比較をすると

$$\mathbb{P}(T = 2m) = 0$$

であることもついでに分かってしまう。

7.13　10.13

7.13.1　103 ページ下から 9 行目

確立測度を入れるためには σ-alg. が必要なわけですが、ここでは 2^E がそれにあたります。

7.13.2　103 ページ下から 3 行目

この形の条件付き確率でもマルコフ性成り立っていてほしいよねって言う式。証明は直観的には素直な感じですが、書いてみると面倒くさいなあというタイプの証明。

証明. 左辺は $\mathbf{E}[Z_{n+1}=j \mid \mathcal{F}_n]$ の一変形だから、

$$\int_G I_{\{Z_{n+1}=j\}} d\mathbb{P}^\mu = \int_G p(X_n, j) d\mathbb{P}^\mu \quad (\forall G \in \mathcal{F}_n)$$

を示せばよい。

当然ながら、$\omega \in G \Rightarrow Z_n(\omega) \in Z_n(G)$ であるから、G は次のように書くことができる。

$$G = \bigcup_{a_n \in Z_n(G)} \cdots \bigcup_{a_0 \in Z_0(G)} \Big\{ Z_0 = a_0, \cdots, Z_n = a_n \Big\}$$

しかも、右辺の $\Big\{ \;\bullet\; \Big\}$ の集合は、a_i 達が変わるたびに disjoint である。さて、測度の可算加法性から次のような計算ができる。

$$\begin{aligned}
\int_G I_{\{Z_{n+1}=j\}} d\mathbb{P}^\mu &= \mathbb{P}^\mu(G \cap \{Z_{n+1}=j\}) \\
&= \mathbb{P}^\mu\left(\left(\bigcup_{a_n \in Z_n(G)} \cdots \bigcup_{a_0 \in Z_0(G)} \Big\{ Z_0 = a_0, \cdots, Z_n = a_n \Big\}\right) \cap \{Z_{n+1}=j\}\right) \\
&= \sum_{a_n \in Z_n(G)} \cdots \sum_{a_0 \in Z_0(G)} \mathbb{P}^\mu(Z_0 = a_0, \cdots, Z_n = a_n, Z_{n+1} = j) \\
&= \sum_{a_n \in Z_n(G)} \cdots \sum_{a_0 \in Z_0(G)} \mu_{a_0} p_{a_0 a_1} \cdots p_{a_{n-1} a_n} p_{a_n j} \\
&= \sum_{a_n \in Z_n(G)} \cdots \sum_{a_0 \in Z_0(G)} \mathbb{P}^\mu(Z_0 = a_0, \cdots, Z_n = a_n) p_{a_n j} \\
&= \sum_{a_n \in Z_n(G)} \mathbb{P}^\mu(Z_n = a_n) p_{a_n j}
\end{aligned}$$

一方、

$$\begin{aligned}
\int_G p(X_n, j) d\mathbb{P}^\mu &= \int p(X_n, j) I_A d\mathbb{P}^\mu \\
&= \sum_{a_n \in Z_n(G)} \mathbb{P}^\mu(Z_n = a_n) p_{a_n j}
\end{aligned}$$

である。ただしここで

$$A := \bigcup_{a_n \in Z_n(G)} \{Z_n = a_n\}$$

としている[18]。したがって示したい等式がしめせた。 □

7.13.3　104 ページ上から 3 行目の式

これももう少し書いてあげたほうが良いのでは……。

$$\mathbf{E}^\mu[h(Z_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n] = \sum_j p(Z_n, j) h(j)$$

---

[18] LaTeX の表記の都合上こうしました

について。

証明. E の元に番号付けをして $e_0, e_1, \cdots$ とする。

$$
\begin{aligned}
Z_{n+1} &= Z_{n+1} I_{\{Z_{n+1}=e_0\}} + Z_{n+1} I_{\{Z_{n+1}=e_1\}} + \cdots \\
&= \sum_{j \in E} Z_{n+1} I_{\{Z_{n+1}=j\}}
\end{aligned}
$$

より、

$$
h(Z_{n+1}) = \sum_{j \in E} h(j) I_{\{Z_{n+1}=j\}} =: X
$$

とする。また、

$$
X_m := \sum_{k=0}^{m} h(e_k) I_{\{Z_{n+1}=e_k\}}
$$

とする。h, I はともに非負の関数だから $0 \leq X_m$ であり、$X_m \uparrow X$ であるから、(cMON) より、

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\mu}[X \mid \mathcal{F}_n] &= \lim_{m \to \infty} \mathbf{E}^{\mu}[X_m \mid \mathcal{F}_n] \\
&= \lim_{m \to \infty} \mathbf{E}^{\mu}[\sum_{k=0}^{m} h(e_k) I_{\{Z_{n+1}=e_k\}} \mid \mathcal{F}_n] \\
&= \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m} \mathbf{E}^{\mu}[h(e_k) I_{\{Z_{n+1}=e_k\}} \mid \mathcal{F}_n] \\
&= \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m} h(e_k) \mathbf{E}^{\mu}[I_{\{Z_{n+1}=e_k\}} \mid \mathcal{F}_n] \\
&= \sum_{j \in E} h(j) \mathbf{E}^{\mu}[I_{\{Z_{n+1}=j\}} \mid \mathcal{F}_n] \\
&= \sum_{j \in E} h(j) \mathbb{P}^{\mu}(Z_{n+1} = j \mid \mathcal{F}_n) \\
&= \sum_{j \in E} h(j) p(Z_n, j)
\end{aligned}
$$

□

7.13.4　104 ページ上から 4 行目

”$h(Z_n)$ is a non-negative supermartingale”とあるが、嘘っぽい。初期分布の μ がディラックのデルタならおそらく問題はない。h が有限という仮定しかない。なので、$\mathbf{E}[|h(Z_n)|]$ もとい、supermartingale の性質より $\mathbf{E}[|h(Z_0)|]$ が有限かどうかという判定はできなさそう。おそらく h が有界という条件ならうまくいくのでは......？もしかして martingale の三番目の条件が成り立ったから、と言ってそこで安心して supermartingale だって言ってる......？僕が何かを見落としている可能性が大なので参考程度に。

7.13.5　104 ページ Exercise

マルコフ連鎖を本格的にやっていないのにこの Exercise をやらせるのは酷なのでは......

等式の証明には次の事実を用いる。

$$\mathbb{P}^i(T_j = m+1) = \sum_{k \neq j} p_{ik} \mathbb{P}^k(T_j = m)$$

これはマルコフ性を用いれば証明できる。が、詳しい証明は確率過程に焦点を当てた教科書に載っている。Poel "Introduction to Stachastic processes" など参照。しかし、直観的にも明らか。$m+1$ で初めて j に行くのは、1 step めではいったん j 出ないところに進みその後 m step かけて j に向かうと思えばよい。次の段落から解答を書きます。

まず、次を示す。

$$\mathbb{P}^i(T_j < n+1) = \sum_{k \neq j} p_{ik} \mathbb{P}^k(T_j < n) + p_{ij} \quad (n \geq 1)$$

[$n = 1$ のとき]

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \mathbb{P}^i(T_j < 2) = \mathbb{P}^i(T_j \leq 1) = p_{ij} \\
(\text{右辺}) &= \sum_{k \neq j} p_{ik} \mathbb{P}^k(T_j < 1) + p_{ij} \\
&= 0 + p_{ij} \\
&= p_{ij}
\end{aligned}$$

より成立する。

[$n = m$ のとき成立すると仮定]

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^i(T_j < m+1+1) &= \mathbb{P}^i(T_J < m+2) \\
&= \mathbb{P}^i(T_j < m+1) + \mathbb{P}^i(T_j = m+1) \\
&= \sum_{k \neq j} p_{ik} \mathbb{P}^k(T_j < m) + p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik} \mathbb{P}^k(T_j = m) \\
&= \sum_{k \neq j} p_{ik} \mathbb{P}^k(T_j \leq m) + p_{ij} \\
&= \sum_{k \neq j} p_{ik} \mathbb{P}^k(T_j < m+1)
\end{aligned}$$

よって、$m+1$ についても成立する。

今示した等式について、$n \to \infty$ とする。

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}^i(T_j < n+1) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k \neq j} p_{ik} \mathbb{P}^k(T_j < n) + p_{ij}$$

左辺は測度の MON より、

$$(\text{左辺}) = \mathbb{P}^i(T_j < \infty)$$

右辺は (多分)DOM で極限が $\sum$ の中に入って、そのあと測度の MON より、

$$(\text{右辺}) = \sum_{k\neq j} p_{ik}\mathbb{P}^k(T_j < \infty) + p_{ij}$$

以上により、

$$f_{ij} = \sum_{k\neq j} p_{ik} f_{kj} + p_{ij}$$

がわかる。

残りは次を証明することである。

> 遷移行列の各成分が 0 より大きいマルコフ連鎖 Z がある[*19]。このとき、全ての P-superharmonic 関数が定数関数なら、マルコフ連鎖 Z は既約で再帰的である。

まず、

$$f_j(i) = \mathbb{P}^i(T_j < \infty)$$

とおく。作用素 P の定義通りに計算すると、f_j が P-superharmonic 関数であることが分かる。仮定より f_j は定数関数となるので、それを α とおくことにする。

$$\begin{aligned}
f_j(i) &= f_{ij} \\
\alpha &= \sum_{k\neq j} p_{ik} f_{kj} + p_{ij} \\
\alpha &= \sum_{k\neq j} p_{ik} f_j(k) + p_{ij} \\
\alpha &= \alpha \sum_{k\neq j} p_{ik} + p_{ij} \\
\alpha\left(1 - \sum_{k\neq j} p_{ik}\right) &= p_{ij} \\
\alpha &= \frac{p_{ij}}{1 - \sum_{k\neq j} p_{ik}} \\
\alpha &= \frac{p_{ij}}{p_{ij}} \\
\alpha &= 1
\end{aligned}$$

よって、

$$\mathbb{P}^i(T_j < \infty) = f_j(i) = \alpha = 1$$

である。i, j は任意より、Z は既約で再帰的である[*20]。

[*19] 「遷移行列の各成分が 0 より大きい」という条件は教科書にはなかったですが、僕の証明ではこの仮定がないと証明にならないのです……。でも、この証明が一番自然なんだよなあと思うんだけど

[*20] この証明は $p_{ij} > 0$ であることを使っておるのじゃ

7.13.6　105 ページマルコフ連鎖の標準モデルについて

ここの話はよくわからない。まず、”canonical model for the Markov chain Z” とは何なのだ。日本語に訳すと「マルコフ連鎖 Z の標準モデル」になる。

まず第一の不満は、「標準モデル」の定義、もしくは定義に相当するものが書かれていない。この本の 1 ページから 104 ページのすべてを見返してみるが、マルコフ連鎖についての話題は Chapter 0、Chapter 4 の 4.8 、Chapter 10 の 10.13 にしか書かれていないです。しかし、これらのどの部分もどのようなものがマルコフ連鎖 Z の標準モデルなのかが明記されていない。

第二の不満は無限直積測度空間を 105 ページまでに定義していないこと。Chapter 8 で直積測度に関して話をしているが、せいぜい有限直積空間までしか触れていない。無限直積空間について話題が出ているが、ちゃんとした定義はされていない。

このページの議論は Appendix 4.3 の内容を使って証明しているが、その証明も本当かどうか怪しい。Appendix 4.3 は $\tilde{Z}_0, \tilde{Y}$ という確率変数を用意して、この二つが独立であるとしている。しかし、本当にそうだろうか。というのも、$\tilde{Z}_0, \tilde{Y}$ は定義域が異なるのだ。つまり、異なる確率空間上の確率変数ということになる。それでは机上の空論を展開しているだけになってしまうのではなかろうか。

舟木『確率論』などを見てみると、コルモゴロフの拡張定理を用いて適当な確率空間上にマルコフ連鎖を構成している。もうこれでいいんじゃないんでしょうか。ここ本当に意味が分からないので教えてください。他の文献やウェブサイトを見てもコルモゴロフの拡張定理を使ったマルコフ連鎖の構成しか見つけられませんでした。

8　Chapter 11

ここは本当に素晴らしい章。しかし若干直観的に示している部分もあるのでそこだけ補足。

8.1　11.2

8.1.1　108 ページ式 (D) について

直観的に明らかですが、きちっとした証明をすると少し煩雑でした。$\leq$ の記号を用いているのは意図的で、$=$ が成立するときがちゃんとあります。

証明. 次のように場合分けする。

1. 上向き横断がなかった場合
   (a) ゲームに参加しなかった場合
   (b) ゲームに参加した場合
2. 上向き横断があった場合
   (a) 最後の横断ののち、ゲームに参加しなかった場合

（b）最後の横断ののち、ゲームに参加した場合

[1.(a) について] 1. は (a),(b) ともに、$U_N[a,b](\omega)=0$ のときである。1.(a) の時は、

$$Y_N = 0$$

であるので、

$$Y_N \geq -(X_N - a)^-$$

が成立。また、このときのみ等号が成立する。

[1.(b) について] ゲームに参加はしているので、どこかの時刻で X は a を下回っている。m をその最小の時刻とする。このとき、

$$Y_N = X_N - X_m$$

となるので、

$$X_N - X_m \geq -(X_N - a)^-$$

を示せばよい。

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= X_N - X_m + (X_N - a)^- \\
&= \begin{cases} X_N - X_m + 0 & (0 \geq -X_N + a) \\ X_N - X_m - X_N + a & (-X_N + a > 0) \end{cases} \\
&= \begin{cases} X_N - X_m & (X_N \geq a) \\ a - X_m & (a > X_N) \end{cases}
\end{aligned}$$

どちらの場合も、>0 となる[*21]。よって成立。

[2.(a) の場合] $U_N[a,b](\omega)=k$ とおく。これは 2.(b) でも同様とする。上向き横断の定義より、ある時刻 $t_k(\leq N)$ が存在して、$X_{t_k} > b$ である。横断を一回終えると所持金は少なくとも $(b-a)$ は増えるので、

$$Y_{t_k} > k(b-a) = (b-a) \times U_N[a,b](\omega)$$

が成立する。

$$\begin{aligned}
Y_N &= Y_{t_k} + (Y_N - Y_{t_k}) \\
&> (b-a)U_N[a,b] + (Y_N - Y_{t_k})
\end{aligned}$$

であることに注意すると、あとは

$$Y_N - Y_{t_k} \geq -(X_N - a)^-$$

を示せばよい。(a) の場合、つまり $t_k + 1$ 行こうゲームに参加しなかった場合、

$$Y_N = Y_{t_k}$$

[*21] X_m の定義！

だから、

$$Y_N - Y_{t_k} = 0 \geq -(X_N - a)^-$$

なので、成立する。

[2.(b) の場合]

$$Y_N - Y_{t_k} \geq -(X_N - a)^-$$

を示ばよいというところまでは同じ。時刻 $(t_k \leq)\, l\, (< N)$ から再びゲームに参加したとする。このとき、

$$Y_N - Y_{t_k} = Y_{t_k} + X_N - X_l - Y_{t_k} = X_N - X_l$$

なので、

$$X_N - X_l + (X_N - a)^- = \begin{cases} X_N - X_l & (X_N \geq a) \\ a - X_l & (a > X_N) \end{cases}$$

どちらの場合も > 0 となる。 □

8.2　11.5

8.2.1　109 ページ 12 行目

$$\Lambda_{a,b} \subseteq \{\omega \mid U_\infty[a,b](\omega) = \infty\}$$

について。

証明. $\omega \in \Lambda_{ab}$ をとる。$U_\infty[a,b](\omega) = k < \infty$ と仮定する。Λ_{ab} の定義より、

$$\liminf X_n(\omega) = \sup_n \inf_{\nu \geq n} X_\nu(\omega) < a$$

この式から明らかなように

$$\inf_{\nu \geq n} X_\nu(\omega) < a \quad (\forall n)$$

同様に、

$$\sup_{\nu \geq n} X_\nu(\omega) > b \quad (\forall n)$$

t_k を最後の上向き横断時刻が達成された時刻とする。時刻 $t_k + 1$ について次が成立する。

$$\inf_{\nu \geq t_k+1} X_\nu(\omega) < a$$

全ての $\nu \geq t_k + 1$ について $X_\nu \geq a$ とすると[*22]、a は数列 $\{X_\nu(\omega)\}_{\nu=t_k+1}^\infty$ の下界である。したがって、下限は下界の最大元であるから

$$\inf_{\nu \geq t_k+1} X_\nu(\omega) \geq a$$

[*22] min でとっているならこの仮定はいらないがいまは inf でとっているので必要

が従い、矛盾する。よって、ある $\xi_1(\geq t_k+1)$ について

$$X_{\xi_1} < a$$

となる。同様の議論をすると、ある $\xi_2(\geq \xi_1)$ について

$$X_{\xi_2} > b$$

となる。これは、$k+1$ 回目の上向き横断が実現されたことになる。よって矛盾。よって $U_\infty[a,b](\omega) = \infty$ が従う。 □

注意. $\limsup$ と $\liminf$ が一致していないということは、絵を描けば X の sample path は上下に振動しまくっていることになる。だから直観的には明らかでしょう。もう少し短い証明があるかもですね。

9 Chapter 12

9.1 12.1

9.1.1 110 ページ下から 2 行目

9.5 節を参照せよとあります。参照しましょう。

9.5 の内容

$\mathcal{F} \supseteq \mathcal{G}$ で、$\mathcal{G}$ は $\mathcal{F}$ の sub σ-alg. とする。$\mathcal{L}^2(\mathcal{F})$ において X の $\mathcal{G}$ に関する条件付き期待値の存在を言うとき、X に直交射影の定理 (6.11 参照) を用いて、とある確率変数 Y の存在を言っていた。この時の Y は次を満たす。

- $(X-Y) \perp Z, \quad \forall Z \in \mathcal{L}^2(\mathcal{G})$
- Y は $\mathbf{E}[X \mid \mathcal{G}]$ の一変形

さて、戻りましょう。教科書の 110 ページの下から 3 行目で

$$\mathbf{E}[M_v \mid \mathcal{F}_u] = M_u \quad (a.s)$$

を示していた。$\mathcal{F}_v$ は完備より、6.11 の定理を使うと、ある $Y \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_u)$ が存在して

$$(M_v - Y) \perp Z \quad (\forall Z \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_u))$$

となる。また、9.5 よりこの Y は $\mathbf{E}[M_v \mid \mathcal{F}_u]$ の一変形だった。条件付き期待値は almost surely で一意的なので、

$$Y = M_u \quad (a.s)$$

したがって、

$$(M_v - M_u) \perp Z \quad (\forall Z \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_u))$$

となり、$(M-v-M_u)$ は $\mathcal{L}^2(\mathcal{F}_u)$ に直交する。M_t, M_s はともに $\mathcal{F}_u$ 可測で、M が $\mathcal{L}^2$ 有界より、

$$M_t,\, M_s \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_u)$$

ゆえに、

$$M_t - M_s \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_u)$$

したがって、とりわけ 110 ページの式 (a) が成立するのである。

9.1.2 111 ページ THEOREM の証明

直観的には明らかだけど...。

証明. $(\Rightarrow)$ M は $\mathcal{L}^2$ 有界とする。(b) 式の右辺より、数列 $\{\mathbf{E}[M_n^2]\}_{n=0}^{\infty}$ は単調増加な数列で、仮定より、上に有界である。したがって、極限

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[M_n^2]$$

は有限の値に収束する。すなわち、

$$\mathbf{E}[M_0^2] + \sum_k \mathbf{E}[(M_k - M_{k-1})^2)] < \infty$$

したがって (c) の式が成立する。

$(\Leftarrow)$ (c) が成立するとする。

$$\mathbf{E}[M_n^2] \le \mathbf{E}[M_0^2] + \sum_k \mathbf{E}[(M_k - M_{k-1})^2] < \infty$$

である。$\mathbf{E}[M_0^2] + \sum_k \mathbf{E}[(M_k - M_{k-1})^2]$ は $\{\mathbf{E}[M_n^2]\}_{n=0}^{\infty}$ の上界である。よって、

$$\sup_n \mathbf{E}[M_n^2] \le \mathbf{E}[M_0^2] + \sum_k \mathbf{E}[(M_k - M_{k-1})^2] < \infty$$

□

9.1.3 111 ページ (c) 式の 2 行下

M_∞ が $\mathcal{L}^2$ に存在するのは Fatou Lemma か言えたり。

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[M_\infty^2] = \mathbf{E}[\liminf M_n^2] &\le \liminf \mathbf{E}[M_n^2] \\ &\le \sup_n \mathbf{E}[M_n^2] \\ &< \infty\end{aligned}$$

9.1.4 111 ページ一番下の行

(e) 式が $=$ でも成立するのは、

$$\lim_{r\to\infty} \mathbf{E}[(M_{n+r} - M_n)^2] = \mathbf{E}[(M_\infty - M_n)^2]$$

が成立するから。なおこの式が成立するのはノルムは連続関数だから。あ

9.2 112 ページ Notation の A_n の定義について

A_n は分散の和なので、実数列。確率変数列じゃないよ！

9.3 112 ページ (*) の式の二つ目の =

分散を計算。

9.4 113 ページ上から 8 行目

N が maritingale になることは計算しましょう。ここまでの議論で

$$\sigma_k^2 = \mathbf{E}[M_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}] - M_{k-1}^2$$

が almost surely で成り立つことが分かっている。この等式を用いて、

$$\mathbf{E}[N_m \mid \mathcal{F}_{m-1}] = N_{m-1}$$

が almost surely で成り立つことを証明しよう。

9.5 113 ページ上から 12 行目

N^T は martingale だから Tower Property を用いれば、

$$\mathbf{E}[N_n^T \mid \mathcal{F}_0] = N_0 = 0$$

が分かる。

9.6 113 ページ (b) の証明の最後の三行

ここは不親切。"bounded"の意味を取り違えないように。翻訳すれば、「しかしながら、$\sum X_n$ が a.s. で収束するから、任意の部分和 $\sum_{k=1}^n X_k$ も上に有界である。したがって、うまく実数 c をとれば、$\mathbb{P}(T = \infty) > 0$ とすることができる。このことと、(**) の式により、$A_\infty := \sum \sigma_k^2 < \infty$ であることが分かる。」のようになる。(この部分の日本語訳の本を見てみましたが、あまり訳がうまくないとおもいます。逐語訳を意識しすぎているのと、学術的な言いまわしに凝りすぎていて日本語として意味が掴みにくいです。)

さて、「部分和が上に有界」とは、次のような意味です。

ω を一つ固定するごとに、n に関する数列 $\{\sum_{k=1}^n X_k(\omega)\}$ は上に有界である。

次のような意味ではないことに気を付けてください[*23]。

[*23] このような誤解を生んでしまうような書き方は避けるべきだと思います。丁寧に「ω を任意に一つ固定すれば」という文言を付け足せば、それだけで悲しい誤解を生まなくて済むのに。

関数列 $\{\sum_{k=1}^{n} X_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ は一様有界である。すなわち、

$$\exists K, \forall\omega, \forall n, \quad |\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega)| \leq K$$

9.6.1　$\mathbb{P}(T=\infty)>0$ について

Y を次のように置きます。

$$Y(\omega) := \sup_n \left|\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega)\right|$$

先ほど言ったように、$Y(\omega)<\infty$ です。よって、$Y(\omega)<c$ となるような実数 c があります。

$$\mathbb{P}(Y<c)\to 1 \quad (c\to\infty)$$

測度の単調性から c を大きくしていけばいつしか $\mathbb{P}(Y<c)$ は 0 を超えます。だからそのような c をとれば、$T_c := \inf\{r \mid |M_r|>c\}$ について

$$\mathbb{P}(T_c=\infty)>0$$

となります。

9.6.2　証明の完成

さきほどとった $\mathbb{P}(T_c=\infty)>0$ となるような c について次のような式が成り立ちます。

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[A_{T\wedge n}] &\leq (K+c)^2 \\
\mathbf{E}[\sum_{k=1}^{T_c\wedge n} \mathrm{Var}(X_k)] &= \left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}(X_k)\right)\mathbb{P}(T_c>n) \\
&\quad + \left(\sum_{k=1}^{T_c}\mathrm{Var}(X_k)\right)\mathbb{P}(T_c\leq n) \\
(K+c)^2 &\geq \left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}(X_k)\right)\mathbb{P}(T_c>n) \\
(K+c)^2 &\geq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Var}(X_k)\right)\mathbb{P}(T_c=\infty) \\
\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Var}(X_k) &\leq \frac{(K+c)^2}{\mathbb{P}(T_c=\infty)}
\end{aligned}$$

9.7　114 ページ 2 行目

”only if”の方、つまり

$$\sum \varepsilon_n a_n \quad \text{converges(a.s.)} \Rightarrow \sum a_n^2 < \infty$$

はここの文章に書かれている以上の条件がいります。それは、$\{\varepsilon_n a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が一様有界であることです。つまり数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が有界であるという条件が必要です。

9.8 114 ページ 4 行目

もう 8 章も前のことなので、影が薄いですが、「確率変数列の和が各点収束する」という事象は末尾 σ-alg. の事象です。つまり、この事象が起こる確率はコルモゴロフの $0-1$ 法則より、1 か 0 です。このことに注意しましょう。

9.9 115 ページ下から 14 行目

(12.2.a) を適用しているのは $(X_n - \mathbf{E}[X_n])$ に使っています。使うからにはこれが独立確率変数の列であることと、各 n について平均が 0 で分散が有限であることを確かめることを忘れずに。

9.10 116 ページ証明の 5 行目

”... for all but finitely many n”という文章は直観的でパット見分かりやすいですが、数式で書いた方がよいと思います。そうでないと扱い方が分かりません。(BC1) で従うのは、

$$\mathbb{P}(\limsup\{|X_n| > K\}) = 0$$

であること。$\limsup\{$ 事象 $F\}$ は、「事象 F が無限回起こること」を意味している。これは、「有限個の n を除いて事象 F が起こる」ことではない[*24]。文学的な表現だけを用いて証明を進めるとこのように意味が分からなくなってしまうので、数式を書くべきところではちゃんとするべきだと思いました。*i.o.* や *e.v.* という用語も直観的に議論を進めるためには大いに重要だと思います。しかし、数式に戻してちゃんと議論をしたいときにはその数式を証明に明記しておかないと分かりにくいと思います。こういうことが多いからこの本嫌いなんだよ。[*25]

というわけで、どのようにして証明 5 行目の式が得られたかを書きます。(BC1) より、$\mathbb{P}(\limsup\{|X_n| > K\}) = 0$ が得られた。この集合の補集合を考える。

$$\begin{aligned}
1 &= \mathbb{P}((\limsup\{|X_n| > K\})^c) \\
&= \mathbb{P}(\liminf\{|X_n| \le K\})) \\
&= \mathbb{P}(\liminf\{X_n^K = X_n\}) \\
&= \mathbb{P}(X_n^K \neq X_n \quad e.v.) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_m \bigcap_{n \ge m} \{X_n^K = X_n\}\right)
\end{aligned}$$

*24 実質無限回起きてるけど

*25 ”for all but finitely mayn n”という表現もここが初出じゃないの？ BC1 を証明した時点で *i.o.* や *e.v.* という用語を導入しているのだから、そっちを使ってほしい。

9.11　116 ページ証明の 6 行目

”It is therefore clear that we need only show that ...;”のところ。ω を固定するごとに有限個の n しか $X_n(\omega) \neq X_n^K(\omega)$ とならない。だから直観的には $\sum X_n^K$ が almost surely で収束することを示せば良さそうです。じつは、

$$\sum X_n \text{が収束} \ (a.s) \Leftrightarrow \sum X_n^K \text{が収束} \ (a.s.)$$

です。これを示すためのちょっとした補題。

補題. $\mathbb{P}$ を確立測度とする。A, B は確率 1 の事象とする。このとき、$\mathbb{P}(A \cap B) = 1$ である。

証明. $\mathbb{P}((A \cap B)^c) = \mathbb{P}(A^c \cup B^c) = 0$ であることが仮定よりわかる。 □

先ほどの同値命題の証明です。

証明.

$$A = \bigcup_m \bigcap_{n \geq m} \{X_n^K = X_n\}$$

$$B = \{\sum X_n \text{が収束} \}$$

$$C = \{\sum X_n^K \text{が収束} \}$$

とおく。

(⇒)

$\omega \in A \cap B$ をとる[*26]。このとき、ある n_ω が存在して、すべての $n \geq n_\omega$ にたいして、$X_n^K(\omega) = X_n(\omega)$ になる。このとき、

$$\begin{aligned}\sum X_n^K(\omega) &= \sum_{k=1}^{n_\omega - 1} X_k^K(\omega) + \sum_{k \geq n_\omega} X_k^K(\omega) \\ &= \sum_{k=1}^{n_\omega - 1} X_k^K(\omega) + \sum_{k \geq n_\omega} X_k(\omega)\end{aligned}$$

また、

$$\sum X_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n_\omega - 1} X_k(\omega) + \sum_{k \geq n_\omega} X_k(\omega)$$

であり、$\omega \in B$ であることに気を付ければ $\omega \in C$ であることがわかる[*27]。よって、$A \cap B \subset C$ が分かる。よって先ほどの補題より、$\mathbb{P}(C) = 1$ であることが分かる。

同様にすれば (⇐) もわかる。 □

[*26] $A \cap B \neq \emptyset$ は確認してください

[*27] ここちょっと面倒くさくなった (おなかすいててん)

9.12　116 ページ'only if' パートの証明

最初の三行から"$|X_n| > K$ for only finitely many n"が分かります。ここまではいいでしょう。ここからどのようにして (BC2) を用いたのかを書きます。有限個の n を除いて $|X_n| > K$ ということは、ある番号 m からすべて $|X_n| \leq K$ となっていることを表します。すなわち、

$$\mathbb{P}(\liminf\{|X_n| \leq K\}) = 1$$

です。これはつまり

$$\mathbb{P}(|X_n| > K \quad i.o.) = 0$$

を表します。$\sum \mathbb{P}(|X_n| > K) = \infty$ を仮定します。X_n は独立だから、事象 $\{|X_n| > K\}$ は独立な事象。したがって、(BC2) を用いることができて、

$$\mathbb{P}(|X_n| > K \quad i.o.) = 1$$

が従います。しかしこれは矛盾。よって、

$$\sum \mathbb{P}(|X_n| > K) < \infty$$

となります。[*28]これにより、(i) が証明できました。あとは前半の証明と同様です。

9.13　117 ページ 3 行目

収束することの定義を使ってこの不等式が得られています。実際は、

$$|v_k - v_\infty| < \varepsilon$$

を変形して得られた式です。

9.14　118 ページ下から 4 行目

$\mathbb{R}$ 上の $\mathbb{R}$ 値関数 h_n を次のように定める。

$$h_n(x) := \begin{cases} x & (|x| \leq n) \\ 0 & (|x| > n) \end{cases}$$

[*28] $\mathbb{P}(|X_n| > K \quad i.o.) = 0$ がわかっているのだから、その和である $\sum \mathbb{P}(|X_n| > K) < \infty$ は自明なのでは？という疑問がありますが、これを自明というのは早計です。$i.o.$ の二文字が付いてなければ確かにそうですが、今回はついているので BC2 を挟まなければならないというお話です。

すると、Y_n, Z_n はそれぞれ $h \circ X_n, h \circ X$ とかけます。よって、X, X_n の分布を Λ, Λ_n と書くことにすれば[*29]、

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}[Z_n] &= \mathbf{E}[h \circ X] \\
&= \int_{\mathbb{R}} h(x)\Lambda_X(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}} h(x)\Lambda_{X_n}(dx) \\
&= \mathbf{E}[h \circ X_n] \\
&= \mathbf{E}[Y_n]
\end{aligned}
$$

となる。

9.15　119 ページ上から 2,3 行目について

9.15.1　二つ目の =

X_n, X は同分布より。

9.15.2　三つ目の =

[*30]

$$
\begin{aligned}
\sum \mathbb{P}(|X| > n) &= \sum \mathbf{E}[I_{\{|X|>n\}}] \\
&= \lim_n \mathbf{E}[\sum_{k=1}^{n} I_{\{|X|>n\}}] \\
&= \mathbf{E}[\lim_n \sum_{k=1}^{n} I_{\{|X|>n\}}] \\
&= \mathbf{E}[\sum_{n=1}^{\infty} I_{\{|X|>n\}}]
\end{aligned}
$$

ここで、三つ目の = については (MON) を用いた。

9.15.3　四つ目の =

右辺の

$$
\sum_{1 \leq n < |X|} 1
$$

は、

$$
\sum_{m \in \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n < |X|\}} 1
$$

[*29] 同じものだけど区別のために記号を導入しました

[*30] 119 ページ上から 3 行目の最初の =

ということ。$\sum$ の下に不等号で $a < n < b$ のように条件が書かれているときは、だいたい a, b は整数だったりすることが多いもんね...。わからなくなるよ...。

ここの期待値が等しいのは、関数として

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_{\{|X|>n\}} = \sum_{1 \le n < |X|} 1$$

が成立しているから。ω を任意に固定して

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_{\{|X(\omega)|>n\}} = \sum_{1 \le n < |X(\omega)|} 1$$

であることを確認してみよう。

別の資料を調べていたら truncation である Y_n の不等号の位置を逆にしたもの、つまり、

$$Y_n := \begin{cases} X_n & (|X_n| < n) \\ 0 & (|X_n| \ge n) \end{cases}$$

と定義して Kolmogorov's truncation Lemma を証明しているものを見つけました[*31]。この場合は $\displaystyle\sum_{1 \le n < |X|}$ と書かずにガウス記号[*32]を使って $\displaystyle\sum_{n=1}^{\lfloor |X| \rfloor}$ と慣れた形で計算できます。

9.16　119 ページ (iii) の証明の二行目の不等式

$$\begin{aligned}
&\sum \frac{\mathrm{Var}(Y_n)}{n^2} \le \sum \frac{\mathbf{E}[Y_n^2]}{n^2} = \sum \frac{\mathbf{E}[|X|^2 I_{\{|X| \le n\}}]}{n^2} \\
=&\mathbf{E}\left[|X|^2 \sum \frac{1}{n^2} I_{\{|X| \le n\}}\right] = \mathbf{E}\left[|X|^2 \sum_{n \ge \max(1,|X|)} \frac{1}{n^2}\right] \\
\le&\mathbf{E}\left[|X|^2 \frac{2}{\max(1,|X|)}\right] \le 2\mathbf{E}[|X|] < \infty
\end{aligned}$$

二つ目の $=$ は Fubini、三つ目の $=$ は $\mathbf{E}$ の中身が関数として一致していることから言える。教科書のように f を定義すれば綺麗に書くことができますが、理解のためにはこのようにしてゴリゴリに書いた方が良いと思います。

9.17　119 ページ下から二行目

"we need onky show that..."のところ。Y_n, X_n は有限個しか違わないので、$n \to \infty$ とすればどうせ異なる部分は 0 に収束して消えちゃうからね。

---

*31 Z_n も同様に定義します。

*32 この pdf では床関数を使って書いています

9.18　120 ページ Doob decomposition について

一意性の証明どこ...... ここ......？

doob 分解の a.s. 一意性の証明を書きます。

証明. X が $X_0 + A_n + M_n$，$X_0 + \tilde{A}_n + \tilde{M}_n$ と二通りに分解できたとする。これにより、

$$A_n + M_n = \tilde{A}_n + \tilde{M}_n$$

が分かる。すべて左辺に移行して

$$A_n + M_n - \tilde{A}_n - \tilde{M}_n = 0$$

両辺 $\mathcal{F}_{n-1}$ で条件付き期待値を取って、

$$\mathbf{E}[A_n + M_n - \tilde{A}_n - \tilde{M}_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = 0$$

すると、martingale や previsible であることを使って、

$$A_n + M_{n-1} - \tilde{A}_n - \tilde{M}_{n-1} = 0$$

ゆえに、

$$A_n = -M_{n-1} + \tilde{A}_n + \tilde{M}_{n-1}$$

である。この A_n をいい感じのところに代入すると,

$$M_n - \tilde{M}_n = M_0 - \tilde{M}_0 = 0$$

よって、

$$A_n = \tilde{A}_n$$

も分かる。なお、ここでの $=$ にはすべて a.s. が付くが、省略している。 □

9.18.1　(b) の証明

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] &\geq X_{n-1} \\ X_0 + M_{n-1} + A_n &\geq X_0 + M_{n-1} + A_{n-1} \\ A_n &\geq A_{n-1} \end{aligned}$$

上から下、下から上どちらの式変形もできるから証明終了。

9.19　122 ページ (c) の証明

$$\infty > \sup_n \mathbf{E}[M_n^2] = \sup_n \mathbf{E}[A_n] = \lim_n \mathbf{E}[A_n] = \mathbf{E}[A_\infty] \underline{\leq \infty}$$

右から見ても、左から見てもいい感じ！

9.20　122 ページ (d) の証明

$\mathbf{E}[M_n^2 - M_{n-1}^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}]$ の M_n^2, M_{n-1}^2 を doob 分解の形に直して計算すると、

$$\mathbf{E}[M_n^2 - M_{n-1}^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] = A_n - A_{n-1}$$

が分かる。一方、

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[M_n^2 - M_{n-1}^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbf{E}[M_n^2 + M_{n-1}^2 - 2M_{n-1}^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\
&= \mathbf{E}[M_n^2 + M_{n-1}^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] - 2M_{n-1}^2 \\
&= \mathbf{E}[M_n^2 + M_{n-1}^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] - 2M_{n-1}\mathbf{E}[M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\
&= \mathbf{E}[M_n^2 + M_{n-1}^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] - 2\mathbf{E}[M_{n-1}M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\
&= \mathbf{E}[M_n^2 + M_{n-1}^2 - 2M_{n-1}M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\
&= \mathbf{E}[(M_n - M_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}]
\end{aligned}$$

9.21　123 ページ上から 3 行目

$$B = \left(\bigcup_k \{S(k) = \infty\}\right) \cap \{\lim M_n \text{が存在しない}\}$$

とする。すると、

$$B \subset \{\lim M_{n\wedge S(k)} \text{が存在しない}\}$$

が分かるので[*33]、(c) より

$$\mathbb{P}(B) = 0$$

が分かる。

9.22　123 ページ上から 14 行目

(e) と (f) から矛盾が導き出せるらしい。[*34]

A は increasing process で、$A_0 = 0$ より、

$$\begin{aligned}
A_{T(c)\wedge n} I_{\{T(c)=\infty\}} &\leq A_{T(c)\wedge n} \quad (a.s.) \\
A_n I_{\{T(c)=\infty\}} &\leq A_{T(c)\wedge n} \quad (a.s.) \\
\mathbf{E}[A_n I_{\{T(c)=\infty\}}] &\leq \mathbf{E}[A_{T(c)\wedge n}] \\
\mathbf{E}[\lim_{n\to\infty}(A_n I_{\{T(c)=\infty\}})] &\leq (c+K)^2 \quad [\text{(MON) and (f)}] \\
\mathbf{E}[A_\infty I_{\{T(c)=\infty\}}] &\leq (c+K)^2
\end{aligned}$$

---

*33 確かめてね

*34 教科書の $T(c)$ という書き方も気に入らないですねえ。stopping time は確率変数だからカッコの中には ω を書きたくなる。T_c とかにしてほしいよね。

したがって、

$$\mathbb{P}(\{T(c)=\infty\}\cap\{A_\infty=\infty\})=0$$

が分かる。これは (e) と矛盾する。

9.23　123 ページ下から 5 行目

"Since $(1+A)^{-1}$ is a bounded previsible process"の"bounded"は"almost surely bounded"の意味でとりましょう。ここも正しいことを言っているのに言い方が雑なせいで誤解を生んでしまったところですね。

さて、W が martingale であることは、10.7 の定理を使っています。しかし、10.7 で出てきた previsible process は「非負、一様有界」という条件が付いています。特に「一様有界」の条件は martingale の可積分性の証明に用います。しかし、現在の 12.14 の $(1+A)^{-1}$ という previsible process は「一様有界」という条件までは課していません。なので、12.14 の W が martingale であることを示すときに、$\mathbf{E}[|W|]<\infty$ であることは個別に証明をした方が良いと思います。

9.24　124 ページ上から 3 行目

(X_n) を i.i.d.r.v.s とし、各 $X_n\in\mathcal{L}^2$ とおきます。$M_n=X_n-\mathbf{E}[X_n]$ とおけば、$(M_n)_{n\geq 0}$ は $\mathcal{L}^2$-martingale になります。この M に対して、$\dfrac{M_n}{A_n}$ に (a) を適応すれば、確かに強法則を見れます。

9.25　124 ページ下から 7 行目

”Then (you check!)”と書かれているので確かめるぞい。

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\left[(M_k - M_{k-1}^2) \mid \mathcal{F}_{k-1}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}[(Z_k - Z_{k-1} - (Y_k - Y_{k-1}))^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}[(I_{E_k} - (\xi_k))^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}[I_{E_k} - 2I_{E_k}\xi_k + \xi_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Big(\mathbf{E}[I_{E_k} \mid \mathcal{F}_{k-1}] - \xi_k \mathbf{E}[2I_{E_k} \mid \mathcal{F}_{k-1}] + \mathbf{E}[(\xi_k)^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}]\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - 2\xi_k\xi_k + \xi_k^2) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \xi_k(1 - \xi_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \xi_k^2) \\
&= Y_n - \sum_{k=1}^{n} \big(\mathbb{P}(E_n \mid \mathcal{F}_{k-1})\big)^2 \leq Y_n - 0 = Y_n
\end{aligned}$$

10　Chapter 13

この章あんまり書くことない。

10.1　126 ページの補題の主張について

論理式で書いたらこんな感じ。

$$\forall X \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow \big(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad s.t. \quad \forall F \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(F) < \delta \Rightarrow \mathbf{E}[|X|; F] < \varepsilon\big)$$

10.2　129 ページ下から 3 行目

$X_n \to X \quad (a.s.)$ ならば $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon \quad i.o.) = 0$ なのか？ $X_n \to X \quad (a.s.)$ なので、

$$\mathbb{P}\Big(\{\omega \mid \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}\Big) = 1$$

である。表記の簡略化のために

$$F := \{\omega \mid \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}$$

とする。さて、今 $\varepsilon' > 0$ を一つ固定する。$\omega \in F$ をとると、定義からある $N_{\varepsilon'} \in \mathbb{N}$ が存在して、任意の $n \geq N_{\varepsilon'}$ について

$$|X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon'$$

であるから、

$$\omega \in \{\omega \mid \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \varepsilon'\} =: G$$

したがって、

$$F \subset G$$

である。G の定義に注目すると、

$$G = \bigcup_{n} \bigcap_{m \geq n} \Big\{ |X_m - X| \leq \varepsilon' \Big\} = \liminf_{n\to\infty} \Big\{ |X_m - X| \leq \varepsilon' \Big\}$$

よって、

$$1 = \mathbb{P}(F) \leq \mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(|X_m - X| \leq \varepsilon' \quad e.v.)$$

以上により、

$$\mathbb{P}(|X_m - X| > \varepsilon' \quad i.o.) = 0$$

10.3　131 ページ下から 11 行目

”we can choose K so that ...”とある。が、UI であることを用いたときの K と 13.1.(b) を用いたときの K は異なるかもしれない。よって、前者の K を K_{UI}、後者の K を $K_{(b)}$ と書くことにすれば[*35]、

$$K = \max\{K_{UI}, K_{(b)}\}$$

とすればよい。

10.4　132 ページ上の 3 行

前節の K に関する注意と同様の注意。”we can choose $\delta > 0$ such that whenever ...”とあるが、今回も X_n および、X ごとに δ の値が変わってくる。全部で $N+1$ 個とれる δ のうち最小のものを選べばよい。

10.5　$\mathcal{L}^p$(-bounded) $[p \geq 1]$ と UI の関係

図に書いたよ。

[*35] 添え字のセンスがゴミだな自分

11 Chapter 14

この章は少し大変かもしれない。

11.1 135 ページ上から 3 行目

M_∞ が $\mathcal{F}_\infty$ なことについて。$M_n \in \mathcal{F}_\infty$ $(\forall n)$ だから。

11.2 135 ページ上から 7 行目

"However, for each n, η is $\mathcal{T}_n$ measurable, and hence (see Remark below) is independent of $\mathcal{F}_n$." のところ。下の"Remark"によくわからない文書が書かれていますが、要するに 14.3 の証明でも 4 章の証明で示したことを利用してますよってこと。それがこの部分。

η[*36]は $\mathcal{T}_n$ 可測より、$\sigma(\eta) \subset \mathcal{T}_n$ になる。よって、η と $\mathcal{F}_n$ が独立。

11.3 136 ページ:14.4 の証明について

後ろ向きのマルチンゲールは見慣れないですが、定義通りに計算すれば大丈夫。

11.3.1 $\{\mathcal{G}_{-n}\}$ は filtration になっているか

filtration は、

$$\mathcal{G}_k \subset \mathcal{G}_{k+1} \ (\forall k)$$

が成立していればいい。$n > 0$ とすると、

$$\mathcal{G}_{-n} \subset \mathcal{G}_{-n+1}$$

は仮定より成立している。

11.3.2 マルチンゲールの性質は満たしているか

$n > 0$ とすると、Tower Property を用いれば

$$\mathbf{E}[M_{-n} \mid \mathcal{G}_{-n-1}] = M_{-n-1}$$

と計算できるのでマルチンゲール。

11.3.3 $\mathcal{L}^1$-bounded であるか

$n > 0$ を任意に一つ固定する。M_{-n} の定義より、

$$\mathbf{E}[|M_{-n}|] = \mathbf{E}[|\mathbf{E}[\gamma \mid \mathcal{G}_{-n}]|] \leq \mathbf{E}[\mathbf{E}[|\gamma| \mid \mathcal{G}_{-n}]] = \mathbf{E}[|\gamma|] < \infty$$

[*36] ここはわざわざ η を導入するよりも、I_F のまま計算を進めたほうが絶対に分かりやすい。

よって、

$$\{M_{-n} \mid n > 0\}$$

は $\mathcal{L}^1$-bounded martingale になる。

11.3.4　残り

$-r \le -n < 0$ とする。$G \in \mathcal{G}_\infty \subset \mathcal{G}_{-r} \subset \mathcal{G}_{-n}$ とする。あとはおなじだ〜がんばれ〜。

11.4　137 ページ上から 7 行目

$$\begin{aligned}
L = \limsup_n \frac{S_n}{n} &= \limsup_n \frac{S_{n+k}}{(n+k)} \\
&= \limsup_n \left(\frac{X_1 + \cdots + X_k}{n+k} + \frac{X_{k+1} + \cdots + X_{k+n}}{k+n} \right) \\
&= \limsup_n \left(\frac{X_{k+1} + \cdots + X_{k+n}}{n} \times \frac{n}{n+k} \right) \\
&= \limsup_n \left(\frac{X_{k+1} + \cdots + X_{k+n}}{n} \right)
\end{aligned}$$

11.5　137 ページ Exercise

Scheffe 使えるのかこれ......？それの証明は分からなかったけど、別解をご用意しました。

$X_1 \in \mathcal{L}^1$ より、$\{\mathbf{E}[X_1 \mid \mathcal{G}_{-1}]; n \ge 1\}$ は UI。

$$\frac{S_n}{n} \to \mu \ (a.s.)$$

より、

$$\frac{S_n}{n} \to \mu \ (\text{in prob.})$$

したがって、

$$\frac{S_n}{n} \to \mu \ (\text{in } \mathcal{L}^1)$$

11.6　139 ページ下から 8 行目

$$\mathbf{E}[e^{\theta S_n}] = e^{\frac{1}{2}\theta^2 n}$$

であることがはよく知られていますが、この本ではまともに標準正規分布について扱っていません。なのでちゃんとガウス積分をして確かめるべきです。

11.7　140 ページ上から 1 行目

$\theta = \frac{c}{n}$ と置いた理由。139 ページの最後の行で、

$$e^{-\theta c} e^{\frac{1}{2}\theta^2 n}$$

が得られている。e の指数を θ に関して平方完成すると、$\theta = \frac{c}{n}$ とした場合に、最小になることが分かる。

11.8　140 ページ上から 8 行目

$$\sup_{k \leq K^n} S_k \leq c_n$$

が a.s. で成立すると書いてあるが、地味に注意が必要。BC1 で得られるのは

$$\mathbb{P}\Bigl(\Bigl\{\sup_{k \leq K^n} S_k < c_n\Bigr\} \quad e.v\Bigr) = 1$$

ということ。ここで、

$$\Bigl\{\sup_{k \leq K^n} S_k < c_n\Bigr\} \subset \Bigl\{\sup_{k \leq K^n} S_k \leq c_n\Bigr\}$$

となっている[*37]ので、測度の単調性より、

$$1 = \mathbb{P}\Bigl(\Bigl\{\sup_{k \leq K^n} S_k < c_n\Bigr\} \quad e.v\Bigr) \leq \mathbb{P}\Bigl(\Bigl\{\sup_{k \leq K^n} S_k \leq c_n\Bigr\} \quad e.v\Bigr)$$

11.9　140 ページ上から 5 行目

14.8(b) を使っているが、使うための条件は満たしているのだろうか。F_n の中身の式を変形すると、

$$\begin{aligned} S_{N^{n+1}} - S_{N^n} &> (1-\varepsilon)\sqrt{2}\sqrt{N^{n+1} - N^n}\sqrt{\log\log(N^{n+1} - N^n)} \\ \frac{S_{N^{n+1}} - S_{N^n}}{\sqrt{N^{n+1} - N^n}} &> (1-\varepsilon)\sqrt{2}\sqrt{\log\log(N^{n+1} - N^n)} \end{aligned}$$

とできる。ここで、各 n に対して $X_n \sim \mathcal{N}(0,1)$ だから、$(S_{N^{n+1}} - S_{N^n}) \sim \mathcal{N}(0, N^{n+1} - N^n)$ であり、

$$\frac{S_{N^{n+1}} - S_{N^n}}{\sqrt{N^{n+1} - N^n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

である。よって、14.8(b) を適用することができる。

[*37] 多くの場合この二つの集合は等しくなりますが……

11.10　140 ページ下から 2 行目

感覚的にはそんな感じがしますが、

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(y+\frac{1}{y}\right)^{-1}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

をちゃんと不等式評価しましょう。

11.10.1　$\exp(-\frac{y^2}{2})$ について

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) &= \exp\left(-(1-\varepsilon)^2 2\log\log(N^{n+1}-N^n)\times\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{1}{\exp\big((1-\varepsilon)^2\log\log(N^{n+1}-N^n)\big)}\\
&\geq \frac{1}{\exp\big((1-\varepsilon)^2\log\log N^{n+1}\big)}\\
&= \frac{1}{\big(\exp(\log\log N^{n+1})\big)^{(1-\varepsilon)^2}}\\
&= \frac{1}{((n+1)\log N)^{(1-\varepsilon)^2}}\\
&\geq \frac{1}{(2n\log N)^{(1-\varepsilon)^2}}\\
&= \frac{1}{(2\log N)^{(1-\varepsilon)^2}}\times\frac{1}{n^{(1-\varepsilon)^2}}\\
&\geq \frac{1}{(2\log N)^{(1-\varepsilon)^2}}\times\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

なお、この式のうち、下から三行目の $\geq$ は

$$(n+1)\log N \leq 2n\log N$$

が $n\geq 1$ で成り立つことを用いている。実際、$n\geq 1$ において、

$$\begin{aligned}
2n\log N-(n+1)\log N &= n\log N-\log N\\
&= (n-1)\log N\\
&\geq 0
\end{aligned}$$

である。

11.10.2 $\left(y+\frac{1}{y}\right)^{-1}$ について

$x \in \mathbb{R}$ とするとき、もし $x \geq 3$ ならば、

$$\frac{x}{x^2+1} \geq \frac{1}{2x}$$

が成り立つ。実際、$x \geq 3$ ならば、

$$\frac{2x^2}{x^2+1} \geq 1$$

であることが分かるから。

$y \geq 3$ のときを考えてこの評価を用いたい。$y \geq 3$ とはすなわち、

$$\begin{aligned}
(1-\varepsilon)\sqrt{2\log\log(N^{n+1}-N^n)} &\geq 3 \\
\log\log N^n(N-1) &\geq \frac{9}{2(1-\varepsilon)^2} \\
\log\Bigl(n\log N + \log(N-1)\Bigr) &\geq \frac{9}{2(1-\varepsilon)^2} \\
n\log N + \log(N-1) &\geq \exp\left(\frac{9}{2(1-\varepsilon)^2}\right) \\
n &\geq \frac{1}{\log N}\exp\left(\frac{9}{2(1-\varepsilon)^2}\right) - \frac{\log(N-1)}{\log N}
\end{aligned}$$

すなわち、

$$n \geq \left[\frac{1}{\log N}\exp\left(\frac{9}{2(1-\varepsilon)^2}\right)\right] =: \alpha(>0)$$

のときは $y \geq 3$ が成立する。ただし、ここで $[\quad]$ はガウス記号を表している。

$y \geq 3$ のとき、つまり $n \geq \alpha$ のとき、

$$\begin{aligned}
\left(y+\frac{1}{y}\right)^{-1} \geq \frac{1}{2y} &= \frac{1}{2(1-\varepsilon)\sqrt{2\log\log(N^{n+1}-N^n)}} \\
&= \frac{1}{2(1-\varepsilon)\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{\log(n\log N + \log(N-1))}} \\
&\geq \frac{1}{2(1-\varepsilon)\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{\log(2n\log N)}} \\
&= \frac{1}{2(1-\varepsilon)\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{\log 2 + \log n + \log\log N}} \\
&= \frac{1}{2(1-\varepsilon)\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{\log n + \log(2\log N)}}
\end{aligned}$$

ここで、下から三行目の $\geq$ について、全ての $n \geq 1$ について、

$$n\log N + \log(N-1) \leq 2n\log N$$

が成り立つことを用いている。実際、

$$
\begin{aligned}
2n\log N - n\log N - \log(N-1) &= n\log N - \log(N-1) \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

である。

加えて、$\beta\colon=[2\log N]$ とすると、$n\geq\beta$ のとき、

$$
\log n + \log 2\log N \leq 2\log n
$$

が成立する。実際、

$$
\begin{aligned}
2\log n - \log n - \log(2\log N) &= \log n - \log(2\log N) \\
&\geq \log(2\log N) - \log(2\log N) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

したがって、$n\geq\max\{\alpha,\beta\}=:\gamma$ のとき、続けて以下のように評価できる。

$$
\begin{aligned}
\left(y+\frac{1}{y}\right)^{-1} &\geq \frac{1}{2(1-\varepsilon)\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{\log n+\log 2\log N}} \\
&\geq \frac{1}{2(1-\varepsilon)\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2\log n}} \\
&= \frac{1}{4(1-\varepsilon)}\times\frac{1}{\sqrt{\log n}} \\
&\geq \frac{1}{4(1-\varepsilon)}\times\frac{1}{\log n}
\end{aligned}
$$

とできる。

以上により、$n\geq\gamma$ のとき、

$$
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(y+\frac{1}{y}\right)^{-1}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\geq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{4(1-\varepsilon)}\frac{1}{\log n}\frac{1}{(2\log N)^{(1-\varepsilon)^2}}\frac{1}{n}
$$

n と関係がない部分をまとめて C と書くことにすると結局、

$$
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(y+\frac{1}{y}\right)^{-1}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\geq C\times\frac{1}{n\log n}
$$

と評価できる。

よって、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(F_n) \\
\geq&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(y+\frac{1}{y}\right)^{-1}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \\
\geq&\sum_{n=1}^{\gamma-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(y+\frac{1}{y}\right)^{-1}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)+C\sum_{n=\gamma}^{\infty}\frac{1}{n\log n} \\
=&\infty
\end{aligned}
$$

11.11　141 ページ上から 4 行目

Step2. で得られた式は

$$\frac{S_k}{h(k)} \le K$$

であること。(S_k) はマルチンゲールであればよい。そこで $(-S_k)$ という martingale[*38] に $K=2$ として Step2. の結果を適用する。

11.12　141 ページ上から 8 行目

$$\sup_{m \ge n} a_m \ge \sup_{m \ge n} a_{N^{m+1}}$$

だから、

$$\inf_n \sup_{m \ge n} a_m \ge \inf_n \sup_{m \ge n} a_{N^{m+1}}$$

がなりたつ。

$$a_n = \frac{S_k}{h(k)}$$

と思えば、

$$\limsup_n \frac{S_n}{h(n)} \ge \limsup_n \frac{S_{N^{n+1}}}{h(N^{n+1})}$$

11.13　141 ページ上から 9 行目

$$\limsup_n \frac{S_{N^{n+1}}}{h(N^{n+1})} \ge \limsup_n \frac{(1-\varepsilon)h(N^{n+1}-N^n) - 2h(N^n)}{h(N^{n+1})}$$

[*38] S_k は martingale だから $-S_k$ も martingale になる。

である。

$$
\begin{aligned}
\limsup_n \frac{h(N^{n+1}-N^n)}{h(N^{n+1})} &= \limsup_n \sqrt{\frac{2(N^{n+1}-N^n)\log\log(N^{n+1}-N^n)}{2N^{n+1}\log\log N^{n+1}}} \\
&= \limsup_n \sqrt{\left(1-\frac{1}{N}\right)}\sqrt{\frac{\log\log(N^{n+1}-N^n)}{\log\log N^{n+1}}} \\
&= \sqrt{\left(1-\frac{1}{N}\right)}\limsup_n \sqrt{\frac{\log\log N^n(N-1)}{\log(n+1)\log N}} \\
&= \sqrt{\left(1-\frac{1}{N}\right)}\limsup_n \sqrt{\frac{\log(n\log N+\log(N-1))}{\log(n+1)+\log\log N}} \\
&\geq \sqrt{\left(1-\frac{1}{N}\right)}\limsup_n \sqrt{\frac{\log(n\log N)}{\log(n+1)+\log\log N}} \\
&= \sqrt{\left(1-\frac{1}{N}\right)}\limsup_n \sqrt{\frac{\log n+\log\log N}{\log(n+1)+\log\log N}} \\
&\geq \sqrt{\left(1-\frac{1}{N}\right)}\lim_n \sqrt{\frac{\log n+\log\log N}{\log(n+1)+\log\log N}} \\
&= \sqrt{\left(1-\frac{1}{N}\right)}
\end{aligned}
$$

最後の極限はロピタルの定理を用いた。一方、同様にすると、

$$
\begin{aligned}
\limsup_n \frac{h(N^n)}{h(N^{n+1})} &= \limsup_n \sqrt{\frac{2N^n\log\log N^n}{2N^{n+1}\log\log N^{n+1}}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{N}}\limsup_n \sqrt{\frac{\log\log N^n}{\log\log N^{n+1}}} \\
&\geq \sqrt{\frac{1}{N}}
\end{aligned}
$$

11.14　141 ページ:14.8 の命題の主張にある記号

この命題において φ と Φ が用いられているが、φ は確率密度関数

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

で、Φ は累積分布関数である、すなわち、

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\varphi(y)dy$$

11.15　141 ページ下から 2 行目

$$\int_x^\infty y\varphi(y)dy = \int_x^\infty \Big(-\varphi'(y)\Big)dy = -\int_x^\infty \varphi'(y)dy = \varphi(x)$$

であり、一方、

$$\int_x^\infty y\varphi(y)dy \geq x\int_x^\infty \varphi(y)dy$$

である。(b) も同様にできる。

11.16　142 ページ下から 2 行目

仮定より

$$c\mathbb{P}(X \geq c) \leq \mathbf{E}[Y; X \geq c]$$

なので、この両辺に pc^{p-2} をかける。その後、両辺を c に関して積分すると教科書のような式が得られる。

11.17　143 ページ上から 7 行目

”Suppose that $||Y||_p < \infty$”とあるが、$||Y||_p = \infty$ の場合は明らかに主張の式は成立する。$||X||_q$ の値についても考えなければならないが、ここでは X についても $||X||_q < \infty$ と仮定して話を進めている。一般の X については証明の最後の三行で述べられる。

11.18　144 ページ (a) の証明最後二行

条件付き期待値のイェンゼンの不等式より、

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Z_r^p \mid \mathcal{F}_{r-1}] &\geq (\mathbf{E}[Z_r \mid \mathcal{F}_{r-1}])^p \\
&\geq (Z_{r-1})^p \\
\mathbf{E}[Z_r^p] &\geq \mathbf{E}[Z_{r-1}^p] \\
||Z_r||_p &\geq ||Z_{r-1}||_p
\end{aligned}$$

が得られるので、$||Z_r||_p$ は r に関して a.s. で単調増加。$\mathcal{L}^p$ 収束しているので

$$||Z_\infty||_p = \lim_{r\to\infty} ||Z_r||_p$$

単調増加であることより、

$$\lim_{r\to\infty} ||Z_r||_p = \sup_r ||Z_r||_p$$

(b) の証明は (a) を適用すればいい。

11.19　145 ページ上 1 行目

”That $a_n \leq 1$ follows from Jensen's inequality.” とあるが、使い方に注意が必要。

$$1 = \mathbf{E}[X_n] = \mathbf{E}\left[(\sqrt{X_n})^2\right] \geq \mathbf{E}\left[\sqrt{X_n}\right]^2 = a_n^2$$

11.20　145 ページ上から 7 行目から 11 行目まで

$$\mathbf{E}[N_n^2] \leq \frac{1}{\Pi a_n}^2 < \infty$$

が得られたが、これにより、$\left(\frac{1}{\Pi a_n}\right)^2$ が上界であることが分かるので、

$$\sup \mathbf{E}[N_n^2] < \infty$$

が導かれるという話。

Doob's $\mathcal{L}^p$ 不等式を $p = 2$ で適用し両辺を二乗すると、

$$\mathbf{E}[\sup N_n^2] \leq 4 \sup \mathbf{E}[N_n^2] < \infty$$

が得られ、一方で N_n^2, M_n の定義から各 n について

$$M_n \leq N_n^2$$

なので、

$$\mathbf{E}[\sup M_n] \leq \mathbf{E}[\sup N_n^2]$$

したがって合わせて

$$\mathbf{E}[\sup M_n] \leq 4 \sup \mathbf{E}[N_n^2] < \infty$$

がわかる。

あとは 13.3(b),13.7 より、$(iii), (ii), (i)$ の順で命題が証明できる。

11.21　14.12 $(v) \Rightarrow (iv)$ の証明について

40 ページ一番下の Excercise をみて。

11.22　14.12 $(i) \Rightarrow (iv)$ の証明について

背理法。(i) かつ (iv) ではないと仮定する。(i) が成り立つことより、

$$\mathbf{E}[M_\infty] = 1 = \lim \mathbf{E}[M_n]$$

すなわち、

$$\mathbf{E}[M_\infty] = \lim \mathbf{E}[M_n]$$

が成立する。すると、

$$\Pi a_n = 0$$

なので、独立性と上で示したことより、

$$\mathbf{E}\left[\sqrt{M_\infty}\right] = 0$$

と書き換えることができる。よって、$M_\infty = 0$ でなければならない。しかしこれは (i) に反する。

11.23　146 ページ証明中の (b) について

この命題は論理式で書くと

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ s.t.\ \forall F \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(F) < \delta \Rightarrow \mathbb{Q}(F) < \varepsilon$$

これは背理法で示す。否定命題

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0,\ s.t.\ \exists F \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(F) < \delta \text{かつ}\ \mathbb{Q}(F) \geq \varepsilon$$

を仮定する。この否定命題によって存在が保証されている ε_0 を一つ選んで固定する。ε_0 と $\frac{1}{2}$ に対してある集合 F_1 が取れる。再び、ε_0 と $\frac{1}{2^2}$ に対してある集合 F_2 が取れる。繰り返すが、ε_0 と $\frac{1}{2^3}$ に対してある集合 F_3 が取れる。このようにして、ある集合列 (F_n) があって、

$$\mathbb{P}(F_n) < \frac{1}{2^n} \text{かつ}\ \mathbb{Q}(F_n) \geq \varepsilon_0$$

となる。

$$\sum \mathbb{P}(F_n) \leq \sum \frac{1}{2^n} < \infty$$

より、(BC1) が使えて、

$$\mathbb{P}(\limsup F_n) = 0$$

であることが分かる。一方絶対連続性より、$\mathbb{Q}(\limsup F_n) = 0$ である。しかし、$\mathbb{Q}$ は有限測度だから、

$$\mathbb{Q}(\limsup F_n) \geq \limsup \mathbb{Q}(F_n) \geq \varepsilon_0$$

これは矛盾。

11.24　146 ページ証明の上から 5 行目から 13 行目

$N = \{1, 2, \cdots, n\}$ とする。$2^N = \{I_m; 1 \leq m \leq 2^n\}$ とする。$1 \leq m \leq 2^n$ について、

$$A_{n,I_m} := \left(\bigcap_{i \in I_m} F_i\right) \cap \left(\bigcap_{i \in N - I_m} F_i^c\right)$$

と定義する。このとき、すべての m について、

$$A_{n,I_m} \in \mathcal{F}_n$$

であり、同じくすべての $i \neq j$ なる i, j について、

$$A_{n,I_i} \cap A_{n,I_j} = \emptyset$$

である。また、

$$\bigcup_{m=1}^{2^n} A_{n,I_m} = \Omega$$

が成立する。すなわち、集合族 $\{A_{n,I_m} \mid 1 \leq m \leq 2^n\}$ は Ω の有限分割になっている。実際、$\omega \in \Omega$ を取ってみると、すべての $i \in N$ について、

$$\omega \in F_i \quad \text{または} \quad \omega \in F_i^c$$

である。そこで、

$$\begin{aligned} N_1 &= \{i \in N \mid \omega \in F_i\} \\ N_2 &= \{i \in N \mid \omega \in F_i^c\} = N - N_1 \end{aligned}$$

とおくと、$N_1 \in 2^N$ なので、ある m' があって、

$$N_1 = I_{m'}$$

とかける。さて、

$$A_{n,I_{m'}} = \left(\bigcap_{i \in I_{m'}} F_i \right) \cap \left(\bigcap_{i \in N - I_{m'}} F_i^c \right) \ni \omega$$

なので、

$$\omega \in \bigcup_{m=1}^{2^n} A_{n,I_m}$$

ゆえに

$$\bigcup_{m=1}^{2^n} A_{n,I_m} \supset \Omega$$

である。逆の包含関係は自明。

　さて、ここで、$A_{n,I_1}, A_{n,I_2}, \cdots, A_{n,I_{2^n}}$ のうちいくつかは空集合になって同じになることがある。そこで空集合は省いて、空でない集合に改めて添え字をつけて

$$A_{n,1}, A_{n,2}, \cdots, A_{n,r_n}$$

とする。$r_n \leq 2^n$ である。これらの集合はどの二つをとっても互いに交わらない。

$$\mathcal{G} := \left\{ G \;\middle|\; \exists I \subset \{1, 2, \cdots, r_n\},\ G = \bigcup_{i \in I} A_{n,i} \right\}$$

とする。また、表記の簡単さのために、$N_r := \{1, 2, \cdots, r_n\}$ とおく。

主張. $\mathcal{G} = \mathcal{F}_n$

Step1. $\mathcal{G}$ が algebra であること。

- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{r_n} A_{n,i} = \Omega$ より、$\Omega \in \mathcal{G}$.
- $G \in \mathcal{G}$ とすると、$\mathcal{G}$ の定義よりある $I \subset N_r$ があって、

$$G = \bigcup_{i \in I} A_{n,i}$$

このとき、

$$G^c = \Omega - \bigcup_{i \in I} A_{n,i} = \bigcup_{i \in (N_r - I)} A_{n,i}$$

$(N_r - I) \subset N$ なので、$G^c \in \mathcal{G}$ である。

- $G_1, \cdots, G_m \in \mathcal{G}$ とする。このとき、$\mathcal{G}$ の定義より、$I_1, \cdots, I_m \subset N_r$ があって、

$$G_1 = \bigcup_{i \in I_1} A_{n,i}, \cdots, G_m = \bigcup_{i \in I_m} A_{n,i}$$

と書ける。そこで、$I = I_1 \cup \cdots \cup I_m$ とおくと、

$$\bigcup_{i=1}^{m} G_i = \bigcup_{i \in I} A_{n,i}$$

と書けるので、$G \in \mathcal{G}$

以上により、$\mathcal{G}$ が algebra であることが示された。

Step2. $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}_n$ であること。実際、各 $A_{n,i}$ は $A_{n,i} \in \mathcal{F}_n$ である。よって、$\forall G \in \mathcal{G}$ は $G \in \mathcal{F}_n$ である。

Step3. $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{G}$ であること、すなわち、$F_1, \cdots, F_n \in \mathcal{G}$ であること。$F_1 \in \mathcal{G}$ であることだけを示せばよい。

$$F_1 = \bigcup_{I \subset N - \{1\}} \left(F_1 \cap \left(\left(\bigcap_{i \in I} F_i \right) \cap \left(\bigcap_{j \in N - I - \{1\}} F_j^c \right) \right) \right)$$

とかける。(左辺)⊃(右辺) は明らか。$\omega \in F_1$ を任意に取る。当然、

$$\omega \in \Omega = \bigcup A_{n,I_m}$$

である。なので、ある $I_m \in 2_N$ があって、

$$\omega \in A_{n,I_m}$$

とできる。このとき、必ず $1 \in I_m$ である。もし、そうでないとすると、$1 \in I_m^c$ となるので、

$$\omega \in F_1^c$$

が導かれてしまうので、矛盾する。したがって、$I = I_m - \{1\}$ とすると、

$$\omega \in F_1 \cap \left(\left(\bigcap_{i \in I} F_i \right) \cap \left(\bigcap_{j \in N - I - \{1\}} F_j^c \right) \right)$$

よって、$\omega \in$ (右辺)。よって、(左辺)=(右辺)

したがって、$\mathcal{G}$ の定義より $F_1 \in \mathcal{G}$

以上により、$\mathcal{G} = \mathcal{F}_n$ であることが示された。

11.25　146 ページ下から 2 行目

"$X_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$"とある。実際に計算して確かめる。ここで r_n はアトムの個数である。前小節参照。X_n の定義より、X_n は単関数なので可測関数。$\mathbb{P} \gg \mathbb{Q}$ であること、すなわち $\mathbb{P}(A_{n,k}) = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}(A_{n,k}) = 0$ であることに気を付ければ、

$$\begin{aligned}
\int_\Omega X_n d\mathbb{P} &= \sum_{k=1, \mathbb{P}(A_{n,k}) \neq 0}^{r_n} \frac{\mathbb{Q}(A_{n,k})}{\mathbb{P}(A_{n,k})} \mathbb{P}(A_{n,k}) + \sum_{k=1, \mathbb{P}(A_{n,k}) = 0}^{r_n} 0 \times \mathbb{P}(A_{n,k}) \\
&= \sum_{k=1, \mathbb{P}(A_{n,k}) \neq 0}^{r_n} \mathbb{Q}(A_{n,k}) + 0 \\
&= \sum_{k=1, \mathbb{P}(A_{n,k}) \neq 0}^{r_n} \mathbb{Q}(A_{n,k}) + \sum_{k=1, \mathbb{P}(A_{n,k}) = 0}^{r_n} \mathbb{Q}(A_{n,k}) \\
&= \mathbb{Q}(\Omega) < \infty
\end{aligned}$$

$\mathbb{P}(A_{n,k}) = 0$ になるかどうかで計算方法が変わってくるので、注意しよう。

11.26　146 ページ一番下の行

(c) の式が成り立つことの証明。

$F \in \mathcal{F}_n$ を任意にとる。すると、ある $I \subset N_r$[*39] が存在して、

$$F = \bigcup_{i \in I} A_{n,i}$$

[*39] N_r は二つ前の小節を参照。$N_r = \{1, 2, \cdots, n_r\}$

と書ける。よって再び $\mathbb{P} \gg \mathbb{Q}$ であることに注意すると

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}[X_n; F] &= \int_F X_n d\mathbb{P} \\
&= \int_{\bigcup_{i \in I} A_{n,i}} X_n d\mathbb{P} \\
&= \sum_{i \in I} \int_{A_{n,i}} X_n d\mathbb{P} \\
&= \sum_{i \in I, \mathbb{P}(A_{n,i}) \neq 0} \mathbb{Q}(A_{n,i}) + 0 \\
&= \sum_{i \in I, \mathbb{P}(A_{n,i}) \neq 0} \mathbb{Q}(A_{n,i}) + \sum_{i \in I, \mathbb{P}(A_{n,i}) = 0} \mathbb{Q}(A_{n,i}) \\
&= \mathbb{Q}(F)
\end{aligned}
$$

となる。

11.27　147 ページ上から 2 行目

”X is a martingale relative to the filtration...”のところ。条件付き期待値の定義より martingale であることの三つ目の条件を確かめることができる。Y を $\mathbf{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]$ の一変形とする。$F \in \mathcal{F}_n$ をとる。$F \in \mathcal{F}_n$ ならば $F \in \mathcal{F}_{n+1}$ であることに気を付ければ次のように計算できる。

$$
\begin{aligned}
\int_F Y d\mathbb{P} = \int_F X_{n+1} d\mathbb{P} &= \int_{\bigcup_{j \in J} A_{n,j}} X_{n+1} d\mathbb{P} \\
&= \mathbb{Q}(F) = \int_F X_n d\mathbb{P}
\end{aligned}
$$

よって、条件付き期待値の定義から

$$\mathbf{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = Y = X_n$$

11.28　147 ページ上から 12 行目

”$X_n \longrightarrow X \quad \text{in} \quad \mathcal{L}^1$”について。概収束はしているので確率収束している。これと UI であることから 13.7 の内容を使う。

11.29　147 ページ上から 14 行目

14.1 より、

$$\mathbf{E}[X \mid \mathcal{F}_n] = X_n$$

がなりたつ。これに気を付けるだけ。

11.30 ラドンニコディムの定理一意性の証明

これは可分の条件が不要。

$X, Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を主張を満たす確率変数とする。$F \in \mathcal{F}$ とすると、

$$\mathbb{Q}(F) = \int_F X d\mathbb{P} = \mathbf{E}[X; F]$$
$$\mathbb{Q}(F) = \int_F Y d\mathbb{P} = \mathbf{E}[Y; F]$$

したがって、

$$Y = \mathbf{E}[X \mid \mathcal{F}]$$

が分かる。ところでこの右辺の X は $\mathcal{F}$ 可測なので $\mathbf{E}[X \mid \mathcal{F}] = X$ よって、

$$X = Y \quad (a.s.)$$

11.31 ラドンニコディムの定理：一般の場合

この部分は、証明をすべて書きます。教科書の証明では (e)⇒(d) をまず証明し、その次に (e) を証明した後、(d)⇒(II)、という流れで証明しています。順番が前後しているので、この pdf では、(e),(e)⇒(d),(d)⇒(II) 、の順番で証明します。

11.31.1 (e) が成り立つこと

背理法で示す。(e) でないとする。すなわち、

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \mathcal{K} \in \mathbf{Sep}, \exists \mathcal{G}_1, \exists \mathcal{G}_2 \in \mathbf{Sep} \ s.t. \ \mathcal{K} \subset \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \text{ and } ||X_{\mathcal{G}_1} - X_{\mathcal{G}_2}||_1 \geq \varepsilon$$

が成立しているとする。この仮定で存在が保証されている ε を任意に一つ固定する。$\varepsilon_0 := \frac{1}{2}\varepsilon$ とする。$\mathcal{K} \in \mathbf{Sep}$ を任意に一つ選ぶ。仮定の命題より $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \in \mathbf{Sep}$ が存在して、$\mathcal{K} \subset \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ であり、

$$||X_{\mathcal{G}_1} - X_{\mathcal{G}_2}||_1 \geq \varepsilon = 2\varepsilon_0$$
$$\mathbf{E}[|X_{\mathcal{G}_1} - X_{\mathcal{G}_2}|] \geq 2\varepsilon_0$$
$$\mathbf{E}[|X_{\mathcal{G}_1} - X_{\mathcal{K}}|] + \mathbf{E}[X_{\mathcal{K}} - X_{\mathcal{G}_2}|] \geq 2\varepsilon_0$$
$$||X_{\mathcal{G}_1} - X_{\mathcal{K}}||_1 + ||X_{\mathcal{G}_2} - X_{\mathcal{K}}||_1 \geq 2\varepsilon_0$$

したがって、

$$\max\{||X_{\mathcal{G}_1} - X_{\mathcal{K}}||_1, ||X_{\mathcal{G}_2} - X_{\mathcal{K}}||_1\} \geq \varepsilon_0$$

そこで、

$$\mathcal{K}(1) := \arg\max_{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2}\{||X_{\mathcal{G}_1} - X_{\mathcal{K}}||_1, ||X_{\mathcal{G}_2} - X_{\mathcal{K}}||_1\}$$

とする。[*40] つまり、$\mathcal{K}(1)$ は $||X_{\mathcal{G}_1} - X_{\mathcal{K}}||_1, ||X_{\mathcal{G}_2} - X_{\mathcal{K}}||_1$ の二つのノルムのうち、値が大きくなる方の $\mathcal{G}$ をえらんでいる。$\mathcal{K}(1)$ に対してもう一度同じ操作を行うと $\mathcal{K}(2)$ が取れる。当然 $\mathcal{K}(2)$ は、$\mathcal{K}(1) \subset \mathcal{K}(2)$ であり、$||X_{\mathcal{K}(2)} - X_{\mathcal{K}(1)}||_1 \geq \varepsilon_0$ を満たしている。この手続きを繰り返せば、可分な σ-alg. の増大列 $\mathcal{K}(1) \subset \mathcal{K}(2) \subset \cdots$ で全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$||X_{\mathcal{K}(n+1)} - X_{\mathcal{K}(n)}||_1 > \frac{1}{2}\varepsilon_0$$

を満たしているものの存在が分かる。

さて、こうして得られた σ-alg. の列 $(\mathcal{K}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ をフィルトレーションとする。このとき、$(X_{\mathcal{K}(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ はこのフィルトレーションに関して UI martingale になる。martingale になることは易しい。adopted process であることと可積分であることは、ラドンニコディムの定理より $X_{\mathcal{K}(n)} \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{K}(n), \mathbb{P})$ であることから分かる。martingale であることの三つ目の条件はラドンニコディム微分である $X_{\mathcal{K}(n)}$ の性質を用いる。つまり、$F \in \mathcal{K}(n)$ を任意にとると、$F \in \mathcal{K}(n+1)$ であることから、$X_{\mathcal{K}(n+1)}$ を F 上で積分することができるようになる。そこで実際に計算を行おうとすると次のようなことが分かる。

$$\mathbf{E}[X_{\mathcal{K}(n+1)}; F] = \int_F X_{\mathcal{K}(n+1)} d\mathbb{P} = \mathbb{Q}(F)$$
$$\mathbf{E}[X_{\mathcal{K}(n)}; F] = \int_F X_{\mathcal{K}(n)} d\mathbb{P} = \mathbb{Q}(F)$$

したがって、条件付き期待値の定義より、

$$\mathbf{E}[X_{\mathcal{K}(n+1)} \mid \mathcal{K}(n)] = X_{\mathcal{K}(n)}$$

であることが分かる。UI であることは 13.1(a) の命題を使う。$\varepsilon > 0$ を任意に一つ選ぶ。13.1(a) より $\delta > 0$ が存在して、

$$\mathbb{P}(F) < \delta \Rightarrow E[X; F] < \varepsilon$$

となる。そこで、$K\mathbb{Q}(\Omega) < \delta$ となる K をとると、

$$\mathbb{P}(X_{\mathcal{K}(n)} > K) \leq \frac{1}{K}\mathbf{E}[X_{\mathcal{K}(n)}] = \frac{1}{K}\mathbb{Q}(\Omega) < \delta$$

以上により、$(X_{\mathcal{K}(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ はある X に $\mathcal{L}^1$ 収束することが分かる。しかし、これが「(e) でない」という仮定に矛盾する。実際、(e) でないことより、ある正の数 ε_0 が存在して

$$||X_{\mathcal{K}(n)} - X_{\mathcal{K}(n+1)}||_1 > \varepsilon_0$$

となる **Sep** の増大列 $(\mathcal{K}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ がとれる。しかし、$(X_{\mathcal{K}(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ が $\mathcal{L}^1$ 収束することから、この ε_0 に対してある自然数 N_{ε_0} が存在してすべての $n(\geq N_{\varepsilon_0})$ について

$$||X - X_{\mathcal{K}(n)}||_1 < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

[*40] argmax のコマンドは編集の都合上用意しませんでした。数式環境の中で text コマンドを使っています。

となる。よって次の計算ができる。

$$\begin{aligned}||X_{\mathcal{K}(N_{\varepsilon_0}+1)} - X_{\mathcal{K}(N_{\varepsilon_0})}||_1 &> \varepsilon_0\\ ||X_{\mathcal{K}(N_{\varepsilon_0}+1)} - X||_1 + ||X - X_{\mathcal{K}(N_{\varepsilon_0})}||_1 &> \varepsilon_0\\ 2 \times \frac{\varepsilon_0}{2} &> \varepsilon_0\end{aligned}$$

よって矛盾が生じる。

11.31.2 (e)⇒(d) がなりたつこと

(e) が成り立つ。$\mathcal{K}_n \in \mathbf{Sep}$ を

$$\mathcal{K}_n \subset \forall\mathcal{G}_1, \forall\mathcal{G}_2 \in \mathbf{Sep} \Rightarrow ||X_{\mathcal{G}_1} - X_{\mathcal{G}_2}||_1 < 2^{-(n+1)}$$

を満たすものとする。これは (e) 成立しているから実際にそのような $\mathcal{K}_n$ を選ぶことができる。

さて、$\mathcal{H}(n) = \sigma(\mathcal{K}(1), \cdots, \mathcal{K}(n))$ とする。$\mathcal{H}(n) \in \mathbf{Sep}$ である。このとき、$X := \lim_{n\to\infty} X_{\mathcal{H}(n)}$ が a.s. の意味でも $\mathcal{L}^1$ の意味でも存在する。このことの証明は教科書の 6.10(a) に倣 (なら) う。

数列 $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を単調増加で $k_n \longrightarrow \infty$ であり、すべての n について $k_n \geq n$ であるようなものとする。$r, s \geq k_n$ とすると、$r, s \geq n$ となるため、$\mathcal{H}(r), \mathcal{H}(s) \supset \mathcal{H}(n)$ となる。したがって、

$$||X_{\mathcal{H}(r)} - X_{\mathcal{H}(s)}||_1 < 2^{-(n+1)}$$

が成立する。特に $r = k_{n+1}, s = k_n$ と思えば

$$||X_{\mathcal{H}(k_{n+1})} - X_{\mathcal{H}(k_n)}||_1 < 2^{-(n+1)}$$

左辺を定義によって書き換えると、

$$\mathbf{E}[|X_{\mathcal{H}(k_{n+1})} - X_{\mathcal{H}(k_n)}|] < 2^{-(n+1)}$$

(MON) より、

$$\mathbf{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} |X_{\mathcal{H}(k_{n+1})} - X_{\mathcal{H}(k_n)}|\right] < \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(n+1)} < \infty$$

よって、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |X_{\mathcal{H}(k_{n+1})} - X_{\mathcal{H}(k_n)}|$ は a.s. で有限である。ここで、

$$\mathcal{N} = \left\{\omega \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} |X_{\mathcal{H}(k_{n+1})}(\omega) - X_{\mathcal{H}(k_n)}(\omega)| = \infty\right\}$$

とする。当然 $\mathbb{P}(\mathcal{N}) = 0$ である。確率変数 X を次のように定義する。

$$X(\omega) = \begin{cases} X_{\mathcal{H}(k_1)}(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(X_{\mathcal{H}(k_{n+1})}(\omega) - X_{\mathcal{H}(k_n)}(\omega)\right) & [\text{if} \quad \omega \in \mathcal{N}^c] \\ 0 & [\text{if} \quad \omega \in \mathcal{N}] \end{cases}$$

すると明らかに

$$\lim_{n\to\infty} X_{\mathcal{H}(n)} = X \quad \text{(a.s.)}$$

である。

次に $\mathcal{L}^1$ の意味でも X に収束することを示す。$\varepsilon > 0$ を任意に一つ固定する。自然数 N_ε を $\dfrac{1}{2^{N_\varepsilon+1}} < \varepsilon \leq \dfrac{1}{2^{N_\varepsilon}}$ を満たすものとする。このとき、$n, m \geq N_\varepsilon$ なら、$\mathcal{H}(n), \mathcal{H}(m) \supset \mathcal{H}(N_\varepsilon)$ なので、

$$||X_{\mathcal{H}(n)} - X_{\mathcal{H}(m)}||_1 < 2^{-(N_\varepsilon+1)} < \varepsilon$$

となる。$r(\geq N_\varepsilon)$ を一つ固定すると、

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[|X_{\mathcal{H}(r)} - X|] &= \mathbf{E}[\lim_{n\to\infty} |X_{\mathcal{H}(r)} - X_{\mathcal{H}(k_n)}|] \\
&= \mathbf{E}[\liminf_{n\to\infty} |X_{\mathcal{H}(r)} - X_{\mathcal{H}(k_n)}|] \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}[|X_{\mathcal{H}(r)} - X_{\mathcal{H}(k_n)}|] \\
&= \liminf_{n\to\infty} ||X_{\mathcal{H}(r)} - X_{\mathcal{H}(k_n)}||_1 \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

よって、$\mathcal{L}^1$ の意味でも収束する。これで (d) を証明することができある。全ての $n(\geq N_\varepsilon)$ と $(\mathcal{H}(n) \subset)\mathcal{G} \in \mathbf{Sep}$ について、

$$\begin{aligned}
||X_{\mathcal{G}} - X||_1 &\leq ||X_{\mathcal{G}} - X_{\mathcal{H}(n)}||_1 + ||X_{\mathcal{H}(n)} - X||_1 \\
&< 2^{-(N_\varepsilon+1)} + 2^{-(N_\varepsilon+1)} \\
&< 2\varepsilon
\end{aligned}$$

11.31.3 (d)⇒(II) がなりたつこと

(d) が成立する。$\varepsilon > 0$ を固定。(d) より、ある $\mathcal{K} \in \mathbf{Sep}$ が存在して、全ての $(\mathcal{K} \subset)\mathcal{G} \in \mathbf{Sep}$ について

$$||X_{\mathcal{G}} - X||_1 < \varepsilon$$

となる。いま、$F \in \mathcal{F}$ を任意にとる。この F について当然 $\sigma(\mathcal{K}, F) \in \mathbf{Sep}$ であり、$\mathcal{K} \subset \sigma(\mathcal{K}, F)$ だから $||X - X_{\sigma(\mathcal{K},F)}||_1 < \varepsilon$ である一方、

$$\begin{aligned}
|\mathbf{E}[X; F] - \mathbb{Q}(F)| &= |\mathbf{E}[X - \mathbb{Q}(F); F] \\
&\leq \mathbf{E}[|X - \mathbb{Q}(F)|; F] \\
&\leq ||X - X_{\sigma(\mathcal{K},F)}||_1 \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

$\varepsilon \to 0$ とすれば定理が証明される。

11.32 149 ページ下から 7 行目

”We say that Y is (a version of)...” の Y はおそらく X の誤植。そうじゃないと話が通じない。

11.33　149 ページ下から 7,8 行目

”Then $\mathbb{P}$ is absolutely continuous to $\mathbb{Q}$ if and only if $\mathbb{P}(X > 0) = 1$, and then X^{-1} is a version of $d\mathbb{P}/d\mathbb{Q}$ ”について。

証明. ($\Rightarrow$) $\mathbb{Q} \gg \mathbb{P}$ とする。仮定より、$\mathbb{P} \gg \mathbb{Q}$ なので、

$$\mathbb{P}(F) = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}(F) = 0$$

$\mathbb{Q} \gg \mathbb{P}$ なので、

$$\mathbb{Q}(F) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(F) = 0$$

したがって、$\mathbb{P}(F) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{Q}(F) = 0$ である。

$\mathbb{Q}(F) = \mathbf{E}[X; F]$ なので、

$$\mathbb{Q}(\{X \le 0\}) = \mathbf{E}[X; X \le 0]$$

$\mathbb{Q}$ は測度より、

$$0 \le \mathbb{Q}(\{X \le 0\}) = \mathbf{E}[X; X \le 0]$$

一方、

$$X1_{\{X \le 0\}} \le 0$$

なので、

$$\mathbb{Q}(\{X \le 0\}) = \mathbf{E}[X; X \le 0] \le 0$$

よって、

$$\mathbb{Q}(X \le 0) = 0$$

よって、$\mathbb{P}(X \le 0) = 0$ となるから、$\mathbb{P}(X > 0) = 1$ である。

($\Leftarrow$) $\mathbb{P}(X > 0) = 1$ とする。$F \in \mathcal{F}$ で $\mathbb{Q}(F) = 0$ とする。

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(F \cap \{X \le 0\}) + \mathbb{P}(F \cap \{X > 0\})$$

だが、仮定より $\mathbb{P}(X \le 0) = 0$ なので、$F \cap \{X \le 0\} \subset \{X \le 0\}$ より、

$$\mathbb{P}(F \cap \{X \le 0\}) = 0$$

したがって、

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(F \cap \{X > 0\})$$

一方、$\mathbb{Q}(F) = 0$ より、$\mathbb{Q}(F \cap \{X > 0\}) = 0$ である。よって、

$$\int X1_{F \cap \{X > 0\}} d\mathbb{P} = 0$$

$X1_{F \cap \{X > 0\}} > 0$ であり、その積分の値が 0 であるから、

$$\mathbb{P}(F \cap \{X > 0\}) = 0$$

よって、$\mathbb{P}(F)=0$。したがって、$\mathbb{Q} \gg \mathbb{P}$

さて、$\mathbb{P}(X>0)=1$ のとき、

$$Y(\omega)=\begin{cases}\frac{1}{X(\omega)} & (X(\omega)>0)\\ 0 & (X(\omega)\leq 0)\end{cases}$$

とすると、$Y \in (m\mathcal{F})^+$ である。ラドンニコディムの定理より、$\mathbb{Q}=X\mathbb{P}$ とできて、5.14(d) より

$$Y\mathbb{Q}=Y(X\mathbb{P})$$

仮定より、これは almost surely で以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} Y\mathbb{Q} &= \frac{1}{X}\mathbb{Q} \quad (a.s.)\\ Y(X\mathbb{P}) &= \frac{1}{X}(X\mathbb{P}) \quad (a.s.)\\ &= \left(\frac{1}{X}X\right)\mathbb{P} \quad (a.s.)\\ &= \mathbb{P} \quad (a.s.) \end{aligned}$$

よって、almost surely で

$$\frac{1}{X}\mathbb{Q}=\mathbb{P}$$

である。 □

11.34 150 ページ下から 13 行目

全ての $F \in \mathcal{F}_n$ について $\mathbb{Q}(F)=\mathbf{E}[Y_1Y_2\cdots Y_n;F]$ を言えばよい。しかし、$\mathcal{F}$ 上で一致することを言うのは困難なので、π-system 上で考える。つまり、$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n$ 上で一致することを言えばよい。それは即ち、任意の n について $\mathcal{F}_n$ 上で一致することを言えばよいことになる。これを言うためには $\mathcal{F}_n$ を生成する π-system である、$\{(\infty,a] \mid a\in\mathbb{R}\}$ 上で一致することを言えばよい。$F\in\{(\infty,a_1]\times\cdots\times(\infty,a_n] \mid a\in\mathbb{R}\}$ を任意にとると、

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \mathbf{E}[Y_1Y_2\cdots Y_n;F]\\ &= \mathbf{E}[I_F r_1(X_1)r_2(X_2)\cdots r_n(X_n)]\\ &= \int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}} I_F(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)r_1(X_1(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n))\cdots r_n(X_n(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n))d\omega_n\cdots d\omega_1\\ &= \int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}} I_F(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)g_1(\omega_1)\cdots g_n(\omega_n)d\omega_n\cdots d\omega_1\\ &= \mathbb{Q}(F) \end{aligned}$$

11.35 151 ページ上から 11 行目

”in which case $\mathbb{P}=\mathbb{Q}$.”について。

$f=g$(a.e) の時密度関数が almost surely で等しいので、全ての $n\in\mathbb{N}$ について $F\in\{(\infty,a_1]\times\cdots\times(\infty,a_n]\mid a\in\mathbb{R}\}$ をとると、

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F)&=\int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}}I_F(\omega_1,\cdots,\omega_n)f(\omega_1,\cdots\omega_n)d\omega_1\cdots d\omega_n\\&=\int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}}I_F(\omega_1,\cdots,\omega_n)g(\omega_1,\cdots\omega_n)d\omega_1\cdots d\omega_n\\&=\mathbb{Q}(F)\end{aligned}$$

よって、π-system 上で一致したので、結局 $\mathbb{P}=\mathbb{Q}$ となる。

11.36　151 ページ下から 7 行目

(b) の条件について。(b) の $[M]_\infty=\uparrow\lim M_n$ はおそらく、$[M]_\infty=\uparrow\lim[M]_n$ の誤植。そうでないと後に登場する $C\bullet M\in\mathcal{H}_0^1$ が証明できない。[*41]

11.37　152 ページ (e) の二行下の式

一つ目の $=$ は (9.7.a) より。$\sigma(M)$ の条件付き期待値ににすることで、M が分かっているとき、とみなせる。よって、以降の計算では M を既知として計算を進めている。

v_n,W_n は定義に従って計算すると、それぞれ $[M]_n,(\varepsilon\bullet M)_n$ と対応していることが分かる。

12　Chapter 16

12.1　175 ページ上から 4 行目

分布関数の不連続な点は実は可算個しかない。

$j=1,2,\cdots$ に対して

$$J_j=\left\{a\in\mathbb{R}\mid F(a+)-F(a-)\geq\frac{1}{j}\right\}$$

とする。このとき、すべての j に対して $|J_j|\leq j$ である。もし、$j+1$ この要素があるとすると、$\frac{1}{j}$ 以上の差が開く点が $j+1$ 箇所あるので、

$$\left(\lim_{x\to\infty}F(x)-\lim_{x\to-\infty}F(x)\right)\geq\frac{j+1}{j}$$

となり、矛盾する。

ここで、F の不連続点の集まりは

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}J_j$$

と等しい。

---

*41 これ日本語訳でも治ってなかったけど、もしかしたら誤植ではない？これが正しい表記？

12.2　分布関数の一意性

”(Check that the theorem does imply that ... ... ,then $F = G$)”のところ。

次を証明したい。

$$F(x) = G(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

なお、X の分布関数は F、分布は μ_X であらわし、Y の分布関数は G、分布は μ_Y で表すことにする。

$x \in \mathbb{R}$ を任意に固定したとき、次の四つの場合が考えられる。

1. x が F の連続点
   (a) x が G の連続点
   (b) x が G の不連続点
2. x が F の不連続点
   (a) x が G の連続点
   (b) x が G の不連続点

このうち、1.(b),2.(a) は F か G かの視点を変えれば同じ話なので 1.(b) のみ考える。

1.(a) について $y(< x)$ を F, G の連続点とする。レヴィの反転公式から、

$$F(x) - F(y) = G(x) - G(y)$$

である。$y \downarrow -\infty$ とすれば、分布関数の性質より、

$$F(x) = G(x)$$

を得る。

1.(b) について $y(< x)$ を F, G の連続点とする。反転公式から

$$\mu_X(y, x) = \frac{1}{2}\mu_Y(\{x\}) + \mu_Y(y, x)$$

であるが、$y \uparrow x$ とすると[*42]、

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \mu_X(\emptyset) = 0 \\ (\text{右辺}) &= \frac{1}{2}\mu_Y(\{x\}) + \mu_Y(\emptyset) = \frac{1}{2}\mu_Y(\{x\})\end{aligned}$$

である。しかし、今 x は G の不連続点だから、$\mu_Y(\{x\}) > 0$ である。したがって矛盾。このような場合はあり得ない。

[*42] この操作は y や x が $\mathbb{R}$ の元であることと、不連続点が可算個だからできる。

2.(b) について $y(<x)$ を F,G の連続点とする。反転公式から

$$\mu_X(y,x)+\frac{1}{2}\mu_X(\{x\})=\mu_Y(y,x)+\frac{1}{2}\mu_Y(\{x\})$$

である。数列 $\{a_n\}$ を非減少で $a_n\uparrow x$ となるもので、各 n について F,G の連続点であるようなものとして取る。測度の (MON) より、

$$\lim_{n\to\infty}\mu_X(y,a_n)+\frac{1}{2}\mu_X(\{x\})=\lim_{n\to\infty}\mu_Y(y,a_n)+\frac{1}{2}\mu_Y(\{x\})$$

である。$y\downarrow-\infty$ とすれば、

$$\lim_{y\to-\infty}\lim_{n\to\infty}\mu_X(y,a_n)+\frac{1}{2}\mu_X(\{x\})=\lim_{y\to-\infty}\lim_{n\to\infty}\mu_Y(y,a_n)+\frac{1}{2}\mu_Y(\{x\})$$

であり、少し確認すればこの極限は交換可能で[*43]

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{y\to-\infty}\mu_X(y,a_n)+\frac{1}{2}\mu_X(\{x\})=\lim_{n\to\infty}\lim_{y\to-\infty}\mu_Y(y,a_n)+\frac{1}{2}\mu_Y(\{x\})$$

となる。これはすなわち、

$$\lim_{n\to\infty}F(a_n)+\frac{1}{2}\mu_X(\{x\})=\lim_{n\to\infty}G(a_n)+\frac{1}{2}\mu_Y(\{x\})$$

ということである[*44]。1.(a) より、$F(a_n)=G(a_n)$ なので、

$$\frac{1}{2}\mu_X(\{x\})=\frac{1}{2}\mu_Y(\{x\})$$

が残り、結局

$$F(x)=\mu_X(-\infty,x)=\mu_Y(-\infty,y)=F(x)$$

がわかる。

12.3 176 ページ (e) の話

「$C_T<\infty$ が成り立つと (つまり可積分である) と分かれば、フビニの定理が使えて、(e) 式のような式変形ができますよ。」という話の流れ。

12.4 176 ページ下から 8 行目

”Next, we can exploit the evenness...”のところ。ここちょっとミスリードな感じがする。$\sin\theta,\cos\theta$ はそれぞれ奇関数、偶関数だが、$\dfrac{\sin\theta}{\theta},\dfrac{\cos\theta}{\theta}$ はそれぞれ偶関数、奇関数になる。よって、計算をして消えるのは cos の方。

奇関数を消した後は $y=|x-a|\theta$ などと置換する。絶対値の兼ね合いで sgn が出現する。

*43 (MON) より、$\lim_{y\to-\infty}\lim_{n\to\infty}\mu_X(y,a_n)=\lim_{y\to-\infty}\mu_X(y,x)=\mu_X(-\infty,x)$ であり、もう一方は同じく (MON) より、$\lim_{n\to\infty}\lim_{y\to-\infty}\mu_X(y,a_n)=\lim_{n\to\infty}\mu_X(-\infty,a_n)=\mu_X(-\infty,x)$

*44 a_n は F の連続点であるということに気を付ければ $\lim_{y\to-\infty}\mu_X(y,a_n)=\mu_X(-\infty,a_n)=\mu_X(-\infty,a_n]=F(a_n)$ となるから。

12.5 177 ページ上から 3 行目

”see Exercise E16.1”のところ。こんなところを見るよりお手持ちの複素関数の教科書を見てくれ。

12.6 177 ページ上から 5 行目

(f) の式は左辺を見ると 1 で押さえられますね？有界です。

12.7 177 ページ上から 11 行目から 16 行目まで

よくわからない。F がすべての点で連続であることについて別の証明を書きました。Rick Durret の”Probability”を参照しました。

$$\left|\frac{e^{-i\theta a}-e^{-i\theta b}}{i\theta}\right| = \left|\int_a^b e^{-i\theta y}dy\right| \leq |b-a|$$

なので、

$$\begin{aligned}\frac{e^{-i\theta a}-e^{-i\theta b}}{i\theta}\varphi(\theta) &\leq \left|\frac{e^{-i\theta a}-e^{-i\theta b}}{i\theta}\varphi(\theta)\right| \\ &\leq |b-a||\varphi(\theta)| \\ &< \infty\end{aligned}$$

であるから、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\theta a}-e^{-i\theta b}}{i\theta}\varphi(\theta)d\theta$$

と書いてよい。[*45] (a) の結果より、任意の $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ について

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mu(\{a\}) + \mu(a,b) + \frac{1}{2}\mu(\{b\}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\theta a}-e^{-i\theta b}}{i\theta}\varphi(\theta)d\theta \\ &\leq \frac{(b-a)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t)|dt\end{aligned}$$

である。今、a, b は $a < b$ であり、任意だから $b \to a$ とすると、

$$\mu(\{a\}) \leq 0$$

となる。したがって、μ はアトムを持つことはない。したがって、F は全ての点で連続である。

[*45] この積分がちゃんと収束するよって言ってる

12.8　16.7 について

冬休みに確認できたら確認します...

13　Chapter 17

13.1　180 ページ (e) の証明

これ (d) の方が簡単だからこっちを演習問題にした方がよかったのでは...？

補題. $X_n \longrightarrow X$ in prob. ならば、適当な部分列 $\{n_k\}$ をとって $X_{n_k} \longrightarrow X$ a.s. とすることができる。

証明. 確率収束しているので $k = 1, 2, \cdots$ に対し、$n_k \in \mathbb{N}$ が存在し、

$$\mathbb{P}(|X_{n_k} - X| \geq 2^{-k}) \leq 2^{-k}$$

とできる。ここで、この式の右辺の無限級数は有限なので、(BC1) を適用できる。したがって、

$$\mathbb{P}(|X_{n_k} - X| \geq 2^{-k} \quad i.o.) = 0$$

である。したがって、

$$\mathbb{P}(|X_{n_k} - X| < 2^{-k} \quad e.v.) = 1$$

が成り立つ。つまり、"k_0 が存在して、$k \geq k_0 \Rightarrow |X_{n_k} - X| < 2^{-k}$ (a.s.)" が成立している。

$\varepsilon > 0$ を任意にとる。するとある k_1 が存在し、$k \geq k_1$ について $2^{-k} < \varepsilon$ となる。そこで $K = \max\{k_0, k_1\}$ とすれば、$k \geq K$ に対して

$$|X_{n_k}(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon$$

が成立する。 □

この補題により、$\{X_n\}$ の部分列 $\{X_{n'}\}$ をとると、$X_{n'} \longrightarrow X$ (a.s.) とすることができる。そこで (d) を適用すると、$h \in C_b(\mathbb{R})$ に対して、

$$\mathbf{E}[h(X_{n'})] \longrightarrow \mathbf{E}[h(X)]$$

となる。ここで、収束先の $\mathbf{E}[h(X)]$ は部分列の取り方によらない (全く同じ議論により結局 $\mathbf{E}[h(X)]$ へと収束してしまう) ため、これは部分列を取らなくても

$$\mathbf{E}[h(X_n)] \longrightarrow \mathbf{E}[h(X)]$$

を意味する。したがって、分布関数は弱収束する。

13.2　181 ページ下から 6 行目

”In similar fashion, ...”のところ。

$$g(y) = \begin{cases} 1 & (\text{if} \quad y \leq \delta - x) \\ 1 - \frac{1}{\delta}(y + \delta - x) & (\text{if} \quad x - \delta < y < x) \\ 0 & (\text{if} \quad y \geq x) \end{cases}$$

と定義する。図を描いたら明らかであるが、次の式がそれぞれ成立する。

$$\begin{aligned} F_n(x-) &\geq \mu_n(x-) \\ \mu(g) &\geq F(x-\delta) \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} F_n(x-) &\geq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(g) \\ &= \mu(g) \\ &\geq F(x-\delta) \end{aligned}$$

であるから、$\delta \downarrow 0$ とすることで、

$$\liminf_{n\to\infty} F_n(x-) \geq F(x-) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

がわかる。

x が F の連続点ならば $F(x) = F(x-)$ となるので、

$$\limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq F(x) = F(x-) \leq \liminf_{n\to\infty} F_n(x-) \leq \liminf_{n\to\infty} F_n(x)$$

とできる。ただし、最後の不等号については分布関数の単調性を用いた。

13.3　182 ページ証明上から 9 行目

”and hence, for large n, $F_n(z) > \omega$”のところ。z は F の連続点だから定理の仮定を用いることができる。

13.4　182 ページ証明下から 3 行目

”and by similar arguments,”のところ。z を F の連続点で $z \leq X^-(\omega)$ とする。$F(z) \leq F(X^-(\omega)), \omega \leq F(X^-(\omega))$ より、$z \leq \omega$ である。仮定より、十分大きな n について $F_n(z) \leq \omega$ となる。したがって、

$$z \leq X_n^-(\omega)$$

あとは同様にすると、

$$X^-(\omega) \leq \liminf_{n\to\infty} X_n^-(\omega)$$

である。

13.5　182 ページ証明最後の行

ほぼ明らかだけどちゃんと書いたら長いからちゃんと書こうね。

$$\limsup_{n\to\infty} X_n(\omega) \leq X_n^+(\omega) = X_n^-(\omega) \leq \liminf_{n\to\infty} X_n^-(\omega)$$

が a.s. で成立する。そこで、

$$X(\omega) = \begin{cases} X^-(\omega) & (X^-(\omega) = X^+(\omega)) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}, X_n(\omega) = \begin{cases} X_n^-(\omega) & (X_n^-(\omega) = X_n^+(\omega)) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

とおけば、

$$\limsup_{n\to\infty} X_n(\omega) = \limsup_{n\to\infty} X_n^+(\omega) \leq X^+(\omega) = X(\omega)$$
$$\liminf_{n\to\infty} X_n(\omega) = \liminf_{n\to\infty} X_n^-(\omega) \geq X^-(\omega) = X(\omega)$$

が a.s. で成立。よって

$$\limsup_{n\to\infty} X_n(\omega) \leq X(\omega) \leq \liminf_{n\to\infty} X_n(\omega)$$

なので、

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X$$

が a.s. で成立する。

13.6　17.3 の別証明

17.3 は 17.2 の補題の if part の証明に当たるが、この if part の証明は別のものがある。

証明． $\varepsilon > 0$ を固定し、$a, b \in \mathbb{R}$ を F の連続点で $a < b$ であり、かつ、$F(a) \leq \varepsilon, 1 - F(b) \leq \varepsilon$ となるようにとる。F は DF なので $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ だからこのようなもの達は取れる。仮定より、a, b においては

$$\lim_{n\to\infty} F_n(a) = F(a)$$

なので (b と書いてももちろん成立)、十分大きな n については

$$F_n(a) \leq 2\varepsilon, 1 - F_n(b) \leq 2\varepsilon$$

とすることができる。

次に、$\delta > 0, f \in C_b(\mathbb{R})$ が任意に与えられたとする。$N = N_\delta$ と点列 $\{a = a_1 < a_2 < \cdots < a_{N+1} = b\}$ を、

- 各 $a_i (i = 2, 3, \cdots, N)$ は F の連続点
- $1 \leq i \leq N$ に対して、$\max_{a_i \leq x \leq a_{i+1}} |f(x) - f(a_i)| \leq \delta$

が成り立つように取る。二つ目の条件は $f \in C_b(\mathbb{R})$ であることより閉区間 $[a, b]$ 上では一様連続になることからこのような点列は取れる。さて、

$$g(x) \equiv g^{\delta, N, \{a_i\}}(x) = \sum_{i=1}^{N} 1_{(a_i, a_{i+1}]}(x)$$

とおく。n が十分大きければ

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_n(dx) - \int_{\mathbb{R}} g(x)\mu_n(dx)\right| \leq & \int_{[-\infty, a)} |f(x) - g(x)|\mu_n(dx) \quad + \int_{[(a,b]} |f(x) - g(x)|\mu_n(dx) \\ & + \int_{(b,\infty)} |f(x) - g(x)|\mu_n(dx) \\ \leq & F_n(a) \times (\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|) + (1 - F_n(b)) \times (\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|) \\ & + \int_{(b,\infty)} |f(x) - g(x)|\mu_n(dx) \\ \leq & (2\varepsilon + 2\varepsilon)(\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|) + \delta\end{aligned}$$

同様にすることで (同じように積分範囲を変えるとよい)

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx) - \int_{\mathbb{R}} g(x)\mu(dx)\right| \leq (\varepsilon + \varepsilon) + \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| + \delta$$

である。ところが、仮定より各 a_i について $\lim_{n\to\infty} F_n(a_i) = F(a_i)$ なので、$n \longrightarrow \infty$ とすれば、

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} g(x)\mu_n(dx) =& \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(F_n(a_{i+1}) - F_n(a_i)) \\ \longrightarrow & \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(F(a_{i+1}) - F(a_i)) \\ =& \int_{\mathbb{R}} g(x)\mu(dx)\end{aligned}$$

よって、三角不等式を用いると、

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_n(dx) - \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx)\right| \leq & \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_n(dx) - \int_{\mathbb{R}} g(x)\mu(dx)\right| \\ & + \left|\int_{\mathbb{R}} g(x)\mu_n(dx) - \int_{\mathbb{R}} g(x)\mu(dx)\right| \\ & + \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_n(dx) - \int_{\mathbb{R}} g(x)\mu(dx)\right|\end{aligned}$$

と評価ができて、これまでの結果より $n \longrightarrow \infty$ とすれば[*46]

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_n(dx) - \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx)\right| \leq \delta + 4||f||_\infty + \delta + 2||f||_\infty + 0$$

[*46] $||f||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$

ε, δ は任意だからこれらを 0 に近づけて、$\mu_n \longrightarrow \mu$ すなわち、$F_n \longrightarrow F$ と弱収束することが分かる。 $\square$

13.7 183 ページ証明の対角線論法について

たとえば $c_1 \in C$ を代入したとき、列 $(F_n(c_1))_{n\in\mathbb{N}}$ は有界な実数列なので、収束部分列 $(F_{n(1,j)}(c_1))$ がとれる。[*47]この収束先 $(j \longrightarrow \infty)$ を $H(c_1)$ とする。さて、いま取った部分列 $\{n(1,j)\}_j$ について、関数列 $\{F_{n(1,j)}(\cdot)\}$ に関しても同様の議論を適用することができる。$c_2 \in C$ を代入するとボルツァノワイエルシュトラスの定理より、収束部分列 $\{F_{n(2,j)}(c_2)\}$ が取れる。この収束先を $H(c_2)$ とおく。なお、この部分列は $\{F_{n(1,j)}(\cdot))\}$ の部分列なので、$F_{n(2,j)}(c_1) \longrightarrow H(c_1)$ となることに注意しよう。(*)

さてこのようにして部分列を繰り返し手に入れていく。$n_i = n(i,i)$ とおく。すると、(*) に書いた注意書きより、

$$H(c) := \lim_{i\to\infty} F_{n_i}(c)$$

がすべての $c \in C$ に対して存在することが分かる。

13.8 184 ページ F の定義

$\mathbb{R}$ 上の関数 F を

$$F(x) = \inf\{H(y) \mid y \in C, y > x\}$$

とおく。

命題. 次が成立。

1. F は右連続
2. F の連続点において、$\lim_{i\to\infty} F_{n_i}(x) = F(x)$ が成立する

証明. 1. $x \in \mathbb{R}$ として $x_k \downarrow x$ となる C の列をとる。この操作は C が稠密な可算集合だから可能である。$\mathbb{Q}$ を思い浮かべて。

$$d := \lim_{k\to\infty} F(x_k)$$

とする。F の単調性より、全ての k について $F(x) \le F(x_k)$ だから、

$$F(x) \le \lim_{k\to\infty} F(x_k) = d$$

そこで、$F(x) < d$ と仮定して矛盾を導く。F の定義 (inf の定義) より、ある $y \in C$ で $y > x$ かつ、$H(y) < d$ なるものが存在する。$x_k \downarrow x$ より、大きな k に対しては $x < x_k < y$ となる。よって、

$$F(x_k) \le F(y) \le H(y) < d$$

[*47] ボルツァノワイエルシュトラスの定理

なので、

$$\lim_{k\to\infty} F(x_k) < d$$

これは矛盾である。

2. x を F の連続点とする。$\varepsilon > 0$ とする。x は F の連続点で C は稠密なので、x に十分近い点 $z_1, z_2, z_3 \in C$ で、$z_1 < z_2 < x < z_3$ かつ、

$$F(x) - \varepsilon < F(z_1) \leq F(z_2) \leq F(x) \leq F(z_3) < F(x) + \varepsilon$$

となるようなものが取れる。ここで、$i \longrightarrow \infty$ とするとき、

$$\begin{aligned} F_{n_i}(z_2) &\longrightarrow H(z_2) \geq F(z_1) = \inf\{H(y) \mid y \in C, y > z_1\} \\ F_{n_i}(z_3) &\longrightarrow H(z_3) \leq F(z_3) = \inf\{H(y) \mid y \in C, y > z_3\} \end{aligned}$$

なので、i が十分大きいと、

$$F(x) - \varepsilon < F(z_1) \leq F_{n_i}(z_2) \leq F_{n_i}(x) \leq F_{n_i}(z_3) \leq F(x) + \varepsilon$$

となることが分かる。ここで、左から二つ目と三つ目の $\leq$ は F_{n_i} が分布関数であることからわかる。この不等式はすなわち、

$$|F_{n_i}(x) - F(x)| < \varepsilon$$

を表している。

□

13.9　184 ページ tightness の定義

たぶんミスプリント。

定義. (F_n) の列が緊密であるとは、すべての $\varepsilon > 0$ に対してある $K > 0$ が存在し、すべての n について

$$\mu_n[-K, K] = F_n(K) - F_n(-K) > 1 - \varepsilon$$

となることを言う。

13.10　184 ページ Lemma の証明

easy ではないが？

証明. (a) (F_n) は緊密ではないとする。この仮定によって存在が保証される $\varepsilon > 0$ を一つ選んで固定する。$K > 0$ を任意に一つ固定する。表記の簡単さのために $G_K := (-K, K)$ とする。さて、$m \geq K$ なるすべての m について、すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mu_n(G_K) \leq \mu_n[-m, m]$$

が成立する。この m について背理法の仮定からある $N_m \in \mathbb{N}$ が存在し、

$$\mu_{N_m}[-m,m] \leq 1-\varepsilon$$

である。もちろん、

$$\mu_n(G_K) \leq \mu_{N_m}[-m,m] \quad \forall n$$

が成立している。F_n は F に弱収束するから、対応する収束先の測度を μ で表すことにすると、

$$\mu(G_K) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(G_K)$$

が成立する (この不等式の確認は後述)。したがって、

$$\mu(G_K) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(G_K) \leq \mu_{N_m}[-m,m] \leq 1-\varepsilon$$

である。K は任意より、$K \longrightarrow \infty$ とすると、

$$1 = \mu(\mathbb{R}) \leq 1-\varepsilon$$

となり矛盾する。

(b) Helly-Bray の補題よりある部分列 (F_{n_k}) と F が存在し、F の連続点においては $\lim_{k\to\infty} F_{n_k}(x) = F(x)$ である。この F は単調性と $0 \leq F \leq 1$ であることと、右連続性はすでに示してあるので、

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$$

を示せばよい。

今、(F_n) は緊密なので部分列 (F_{n_k}) も緊密になる。したがって、ある $K > 0$ が存在し、$x < -K$ なら $F(x) < \varepsilon$ とできる。実際、$F(K) - F(-K) > 1-\varepsilon$ より、

$$\begin{aligned} 0 \leq F(-K-) &< F(K) - 1 + \varepsilon \\ &= \varepsilon - (1 - F(K)) < \varepsilon \end{aligned}$$

だからである。これはつまり。

$$|F(x) - 0| < \varepsilon$$

なので、$\lim_{x\to-\infty} F(X) = 0$ を表している。一方、$x > K$ ならば、$F(x) > 1-\varepsilon$ とできる。実際、

$$\begin{aligned} F(K) - F(-K-) &> 1-\varepsilon \\ F(K) &> (1-\varepsilon) + F(-K-) > 1-\varepsilon \end{aligned}$$

最後の不等式は $\geq$ にならないことに注意しよう。これはつまり

$$1 - F(x) < \varepsilon$$

なので、$\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ を表している。

□

13.10.1　後述と書いたところの確認

補題. μ_n が μ に弱収束するとき、任意の $\mathbb{R}$ の開集合 G について、

$$\liminf_{n\to\infty}\mu_n(G)\geq\mu(G)$$

が成立する[*48]。

証明. C を $\mathbb{R}$ の任意の閉集合とする。いまから、

$$\mu(C)\geq\limsup_{n\to\infty}\mu_n(C)$$

を証明する。そうすれば定理の主張は補集合を取ることで確かめられる。

$$\mathrm{dist}(x,C)=\inf\{|x-y|\mid y\in C\}$$

とおく。

$$h_n(x)=\frac{1}{(1+\mathrm{dist}(x,C))^n}$$

とおく。すると、各 n ごとに $h_n\in C_b(\mathbb{R})$ であり、$h_n(x)\longrightarrow I_C(x)$ と各点収束する。よって (BDD) より、

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}h_n(x)\mu(dx)=\int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty}h_n(x)\mu(dx)=\mu(C)$$

一方、弱収束することより、

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}h_k(x)\mu_n(dx)=\int_{\mathbb{R}}h_k(x)\mu(dx)$$

である。したがって、次のような計算ができる。

$$\begin{aligned}
h_n(x)&\geq I_C(x)\\
\int_{\mathbb{R}}h_n(x)\mu_k(dx)&\geq\mu_k(C)\\
\limsup_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}}h_n(x)\mu_k(dx)&\geq\limsup_{k\to\infty}\mu_k(C)\\
\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}}h_n(x)\mu_k(dx)&\geq\lim_{n\to\infty}\limsup_{k\to\infty}\mu_k(C)\\
\mu(C)&\geq\limsup_{k\to\infty}\mu_k(C)
\end{aligned}$$

これにより、G を開集合とすると G^c は閉集合になるので、

$$\begin{aligned}
\mu(G^c)&\geq\limsup_{k\to\infty}\mu_k(C)\\
1-\mu(G)&\geq1+\limsup_{k\to\infty}(-\mu_k(G))\\
-\mu(G)&\geq-\liminf_{k\to\infty}\mu_k(G)\\
\mu(G)&\leq\liminf_{k\to\infty}\mu_k(G)
\end{aligned}$$

[*48] 実は同値条件

□

14 Chapter18

17 章で頑張ったので簡単。

14.1 185 ページ最後の行

”Thus $g = \varphi_F$”のところ。微積のちょっとしたアレ。θ を代入するごとに実数列になることに気を付ければ

$$g(\theta) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(\theta) = \lim_{k\to\infty} \varphi_{n_k}(\theta) = \varphi_F(\theta)$$

である。

14.2 187 ページ積分順序を交換したところ

理由としては $|1 - e^{i\theta x}| \leq 2$ であるからとしている。これは直積測度 $dF_n \times d\theta$ で積分したときに可積分になるから、積分の順序交換が可能になると言っている。

14.3 188 ページ (b)

ここの z は複素数。複素数のとき、log は多価関数になるので主値 (principal value) を取っているんですね。

14.4 189 証明下から 6 行目

”But now, using (18.3.c)”のところ。不等式なのに等式の変形するのやめてくれ。

$$z_n = -\frac{1}{2}\frac{\theta^2}{n} + o\left(\frac{\theta^2}{n}\right)$$

とおくと、z_n^2 は $\frac{1}{n^2}$ か、それより収束が早い項しか含まれないので、$|z_n|^2 = o(\frac{1}{n})$ である。よって、

$$\begin{gathered}
-|z_n|^2 \leq \log(1+z_n) - z_n \leq |z_n|^2 \\
o\left(\frac{1}{n}\right) \leq \log(1+z_n) - z_n \leq o\left(\frac{1}{n}\right) \\
o\left(\frac{1}{n}\right) + z_n \leq \log(1+z_n) \leq o\left(\frac{1}{n}\right) + z_n
\end{gathered}$$

なので、教科書のような変形ができる[*49]。

[*49] ここの式変形うまく書けなかった

14.5 190 ページ上から 9 行目

$$\varphi_{N_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t)$$

の X_k は I_{E_k} を表している。

14.6 190 ページ上から 11 行目からの式変形

まず初めに、左辺は $\log(\varphi_{G_n}(\theta))$ の書き間違い。

二つ目の $=$ はテイラー展開。三つ目の $=$ は (18.3.c) の近似。O の項は $\frac{1}{k}(it - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2))$ を二乗したときに最も収束が遅い項は $\frac{t^2}{k^2}$ の項。それの和の分だけ余っている[*50]。O の項は $\log(1+x)$ をテイラー展開したときの剰余項と見てもよい。四つ目の $=$ は「オイラー定数 $=$ 調和級数 $-\log n$」であることを使う。$O(1)$ は $\sum \frac{1}{k^2}$ はそもそも定数に収束するので、$O(1)$ となる。五つ目の $=$ は、四つ目の $=$ で得られた式を展開すると分かる。それぞれの項を見ると $-\frac{1}{2}\theta^2$ 以外の項は 0 へ収束していくことが分かる。

14.6.1 18.5 について

この例を見ると、中心極限定理は同分布の確率変数でないものに対しても成り立っているように見える。しかし、よく考えると、この例は同分布がない代わりにかなり強い仮定を課している[*51]。それでも独立性は外せない。組ごとに独立くらいにゆるめると中心極限定理はどうなるのでしょうか？

15 Appendix for Chapter14

停止時刻についても任意抽出定理が成り立つよという話 (主張が激つよ)

15.1 219 ページ最後の行

先に $\mathcal{F}_T$ が σ-alg. であることを証明するべき。そのあとに諸命題を示す。

15.1.1 $\mathcal{F}_T$ が σ-alg. であること

- $\emptyset \cap \{T \leq n\} = \emptyset \in \mathcal{F}_n \quad \forall n$
- $F \in \mathcal{F}_T$ とする。すべての n について $F \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ である。よって、

$$F^c \cap \{T \leq n\} = \{T \leq n\} - (F \cap \{T \leq n\}) \in \mathcal{F}_n$$

[*50] ここの説明微妙だ

[*51] $\mathbb{P}(E_n) = \frac{1}{n}$

- $F_1, F_2, \cdots \in \mathcal{F}_T$ とする。全ての $i \in \mathbb{N}$ について、

$$F_i \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n$$

が成立する。したがって、

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} (F_i \cap \{T \leq n\}) \in \mathcal{F}_n \quad \forall n$$

つまり、

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n$$

15.1.2　$T \equiv n \Rightarrow \mathcal{F}_T = \mathcal{F}_n$ であること

$F \in \mathcal{F}_T$ をとる。

$$F \cap \{T = n\} = F \in \mathcal{F}_n$$

より、$F \in \mathcal{F}_n$

$F \in \mathcal{F}_n$ をとる。$T \equiv n$ より、

$$F \cap \{T = n\} = F \in \mathcal{F}_n$$

n 以外のすべての自然数 m について、

$$F \cap \{T = m\} = \emptyset \in \mathcal{F}_m$$

よって、$F \in \mathcal{F}_T$

15.1.3　$T \equiv \infty \Rightarrow \mathcal{F}_T = \mathcal{F}_\infty$ であること

$F \in \mathcal{F}_T$ とする。$T \equiv \infty$ より、

$$F \cap \{T = \infty\} = F \in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_\infty$$

よって、$F \in \mathcal{F}_\infty$

逆の包含関係は少し工夫して証明する。$F \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ をとる。全ての n について、

$$F \cap \{T \leq n\} = \emptyset \in \mathcal{F}_n$$

なので、$F \in \mathcal{F}_T$ である。よって、$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_T$ である。$\mathcal{F}_T$ は σ-alg. であることは示したから、$\mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{F}_T$ が従う。

15.1.4　全ての T について $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_\infty$ であること

もうこの pdf 中で示したようなものだよ。(省略します)

15.2　220 ページ上から 3 行目

これはもっと一般的なことが言えるし、ヒントこれ間違ってないですか？

命題. S, T を停止時刻で $S \leq T$ とする。このとき、

$$\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$$

が成立する。

証明. $F \in \mathcal{F}_S$ をとると、すべての n について $F \cap \{S \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ である。$S \leq T$ より、$\{T \leq n\} \subset \{S \leq n\}$ である。T は停止時刻より、$\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ である。したがって、

$$F \cap \{T \leq n\} = F \cap \{S \leq n\} \in \mathcal{F}_n$$

□

15.3　220 ページ下から 4 行目カッコのなか

"(Of course, the fact that... ... $< \infty$)"のところ。きちんとするためには次のように考えている。

$$X_T = XI_{\{T=1\}} + XI_{\{T=2\}} + \cdots + XI_{\{T=N\}}$$

なので、三角不等式を用いる。

15.4　221 ページ上から 12 行目

"(check!)"のところ。これを確認しないと、のちに続く積分の計算ができるかわからない。

$F \in \mathcal{F}_T$ とする。$F \cap \{T \leq k\} \in \mathcal{F}_{T \wedge k}$ がすべての k について成立している。このとき、

$$(F \cap \{T \leq k\}) \cap \{T \wedge k \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n$$

を示せばよい。

1. $n < k$ のとき このとき

$$\{T \wedge k \leq n\} = \{T \leq n\}$$

　である。なぜなら、$\omega \in$ (LHS) とすると[*52]、$T(\omega) \wedge k \leq n$ であり、いま、$n < k$ より、$T(\omega) \wedge k = T(\omega) \leq n$ である。一方、$\omega \in$ (RHS) とすると、$T(\omega) \leq n$ であるから、$T(\omega) \wedge k \leq T(\omega) \leq n$ より、OK。よって、

$$\begin{aligned}(F \cap \{T \leq k\}) \cap \{T \wedge k \leq n\} &= F \cap \{T \leq k\} \cap \{T \leq n\} \\ &= F \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n\end{aligned}$$

[*52] LHS は左辺の意味。Left Side Hand. 同様に、RHS は右辺の意味。Right Side Hand.

である。

2. $k \leq n$ のとき

$$\{T \leq k\} \cap \{T \wedge k \leq n\} = \{T \leq k\} \cap \Omega = \{T \leq k\} \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$$

したがって、

$$(F \cap \{T \leq k\}) \cap \{T \wedge k \leq n\} = F \cap \{T \leq k\} \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$$

よって、1.,2. より、$F \cap \{T \leq k\} \in \mathcal{F}_{T \wedge k}$ である。

15.5　221 ページ上から 14 行目

考え中です。なんで一般性失わないんだろう。

15.6　221 ページ Cor1

"$E[|X_T|] < \infty$"について。

$$\begin{aligned} E[|M_\infty|] &= E\left[|M_\infty|; \bigcup_{k=0}^{\infty}\{T = k\} \cup \{T = \infty\}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E[|M_\infty|; \{T = k\}] + E[|M_\infty|; \{T = \infty\}] \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} E[|M_\infty| \mid \mathcal{F}_k] &\geq |E[M_\infty \mid \mathcal{F}_k]| = |M_k| \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} E[|M_k|; \{T = k\}] = E[|M_T|] \end{aligned}$$

したがって M_T は可積分。

15.7　221 ページ下から 6 行目

"(Exercise : explain why!)"のところ。

X が submartingale より、A は増加過程。Doob 分解の定義より、$A_0 = 0$ なので、過程 A は非負。したがって、全ての n に対して、

$$X_n = X_0 + M_n + A_n \geq X_0 + M_n$$

よって、

$$|X_n| + |X_0| \geq |X_n - X_0| \geq |M_n|$$

X が UI なので $(|X_n| + |X_0|)_{n\in\mathbb{N}}$ も UI である。[*53]従って、

$$\begin{aligned}\varepsilon \geq E[|X_n - X_0|; |X_n - X_0| > K] \\ \leq E[|M_n|; |X_n - X_0| > K] \\ \leq E[|M_n|; |M_n| > K]\end{aligned}$$

よって、M は UI である。したがって、

$$M_\infty = \lim_{n\to\infty} M_n$$

は a.s. の意味でも $\mathcal{L}^1$ の意味でも存在する。

$$A_n = X_n - M_n - X_0$$

X も UI なので X_∞ も a.s. と $\mathcal{L}^1$ の意味で存在する。したがって、A_∞ は a.s. と $\mathcal{L}^1$ の意味で存在する。よって、$E[A_\infty] < \infty$ である。

[*53] 13 章に対する巻末の Exercise を適用する。その証明は後述 (まだできていない)。