マルコフ連鎖に触れよう

発表の流れ

1. 確率論での言葉や用語の定義
   - $\mathbb{P}$ や Ω の意味
   - 条件付き確率と独立
   - 確率変数と平均
   - 確率密度関数
2. Markov Chain の定義と例
   - Markov Chain の定義
   - 遷移関数を使った Markov Chain の特徴づけ
   - Markov Chain の例
     - Random Walk(ランダムウォーク)
     - Gambler's Ruin Chain(破産問題)
     - Branching Chain
3. Markov Chain を使った現実的な問題への応用
   - ルーレットで狙った金額分勝つ確率
4. 終わりに

発表の流れ

今での確率論

問題

6 面ダイスを 1 回振って 3 の目が出る確率は?

今での確率論

問題

6 面ダイスを 1 回振って 3 の目が出る確率は?

答

出る目のパターンは $1, 2, 3, 4, 5, 6$ だから, 求める確率は

$$\frac{1}{6}$$

少し強引な例

問題

ボタンを 1 回押すと正の整数が表示されるプログラムがある. ボタンを一回押したとき, 表示される値が 3 である確率を求めよ.

少し強引な例

問題

ボタンを 1 回押すと正の整数が表示されるプログラムがある．ボタンを一回押したとき，表示される値が 3 である確率を求めよ．

答

正の整数は無限個あるから，求める確率は

$$\frac{1}{\infty} = 0(?)$$

改題

ボタンを一回押すと正の整数が表示されるプログラムがある.
ボタンを一回押したとき, 表示される値が偶数である確率を求めよ.

改題

ボタンを一回押すと正の整数が表示されるプログラムがある．ボタンを一回押したとき，表示される値が偶数である確率を求めよ．

答

正の数の二つに一つは偶数だから求める確率は

$$\frac{1}{2}$$

である．

考え方

こう捉える

集合に $[0,1]$ の値を対応させる．ある意味「集合の大きさ」を測っている．

$$(\text{正の整数全体の大きさ})\mathbb{P}(\mathbb{N}) \to 1$$

$$(\text{偶数の集合の大きさ})\mathbb{P}(2\mathbb{N}) \to \frac{1}{2}$$

確率を語るための定義

定義

空でない集合 Ω を標本空間という．これは全ての結果を集めた集合である．Ω の部分集合 A を事象という．A は $\emptyset$ でもよい．$\mathbb{P}$ を確率測度という．事象 A が起こる確率のことを $\mathbb{P}(A)$ と表わす．

注意

$\mathbb{P}$ は Ω の部分集合を $[0, 1]$ のある値に対応させる関数だと思ってよい．ただし，

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1, \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

である．

条件付き確率の定義

定義

Ω を標本空間,A, B を事象とする．あらかじめ A が分かることが判明している時,B が起こる確率のことを条件付き確率といい,$\mathbb{P}(B|A)$ と書く．この確率は次の式で計算する．

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

独立性の定義

定義

事象 A, B が独立であるとは, 次を満たすときである.

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

確率変数

定義

関数 $X:\Omega\to\mathbb{N}$ を確率変数という.

確率変数

定義

関数 $X : \Omega \to \mathbb{N}$ を確率変数という.

注意

今後断りなしに $\mathbb{P}(X = \alpha)$ などと書くが, これは

$$\mathbb{P}(X = \alpha) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) = \alpha\})$$

のことである.

平均

定義

確率変数 X の平均 (期待値)$E[X]$ は次で定義する.

$$E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$$

平均

定義

確率変数 X の平均 (期待値)$E[X]$ は次で定義する.

$$E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$$

補足

Ω が非可算集合である場合などは, 積分で定義する. むしろこれが通常の定義.

$$E[X] = \int_{\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

確率密度関数

定義

確率変数 X の**密度関数** f_X とは,$f_X : \mathbb{N} \to [0,1]$ なる関数で,

$$f_X(\alpha) = \mathbb{P}(X = \alpha)$$

発表の流れ

1. 確率論での言葉や用語の定義
   - $\mathbb{P}$ や Ω の意味
   - 条件付き確率と独立
   - 確率変数と平均
   - 確率密度関数
2. Markov Chain の定義と例
   - Markov Chain の定義
   - 遷移関数を使った Markov Chain の特徴づけ
   - Markov Chain の例
     - Random Walk(ランダムウォーク)
     - Gambler's Ruin Chain(破産問題)
     - Branching Chain
3. Markov Chain を使った現実的な問題への応用
   - ルーレットで狙った金額分勝つ確率
4. 終わりに

状態空間

定義

$\mathcal{I}$ は高々可算無限個の集合とする．これを状態空間と呼ぶ．
今回は状態空間は全て自然数の集合の部分集合とすることにする．すなわち,$\mathcal{I} \subset \mathbb{N}$ とする．

問題

「超サン」という名前のロボットがいる．このロボットはとても役に立つが，たまに故障する．一日の始めに「超サン」が正常か故障しているかのチェックを行う．その時に正常ならその日は一日正常で，故障しているならその日はずっと故障している．

- ある日に故障していれば，次の日は確率 p で修理に成功し正常に動作する．
- ある日に正常に動作していれば，次の日は確率 q で故障してしまう．

正常な状態を 1，故障している状態を 0 と対応させよう．つまり $\mathcal{I} = \{0, 1\}$ とする．

問題続き

X_n を n 日目の「超サン」の状態を表す確率変数としよう．たとえば,$X_n = 1$ なら n 日目は「超サン」は正常であることを意味する．
さて,「超サン」の状態を記録する記録員・コードネーム＝川湾がいたが, 彼の手記によると, 記録初日は正常, 二日目は故障, 三日目も故障, 四日目は正常であった．すなわち,

$$X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0, X_4 = 1$$

であった．このとき, 五日目が故障, すなわち,$X_5 = 0$ である確率はいくらだろうか.

解答

初日から四日目の状態があらかじめわかっている状態で, 五日目が正常である確率をもとめるのだから, 条件付き確率の計算をすればよい. すなわち,

$$\mathbb{P}(X_5 = 0 | X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0, X_4 = 1)$$

を計算するのだが, よく考えると, ある日に正常ならばその翌日に故障する確率は q であったから

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_5 = 0 | X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0, X_4 = 1) \\ =&\mathbb{P}(X_5 = 0 | X_4 = 1) \\ =&q \end{aligned}$$

Markov Property

定義

確率変数列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がマルコフ性を持つとは,$x_0, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1} \in \mathcal{J}$ に対して次を満たすこと.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) \\ = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n)\end{aligned}$$

遷移関数

定義

$x, y \in \mathcal{J}$ に対して**遷移関数** $P(x, y)$ は次で定義する.

$$P(x, y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x)$$

遷移関数

定義

$x, y \in \mathcal{J}$ に対して遷移関数 $P(x, y)$ は次で定義する．

$$P(x, y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x)$$

注意

遷移関数 $P(x, y)$ の値は n に依存しないものとする．すなわち，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) &= \mathbb{P}(X_n = y | X_{n-1} = x) \\ &= \cdots = \mathbb{P}(X_1 = y | X_0 = x)\end{aligned}$$

が成り立つとする．

Markov Chain

定義

確率変数列 (X_n) がマルコフ鎖をなすとは, この確率変数列がマルコフ性を満たし, かつ,n に依存しない遷移関数を持つときに言う

初期分布

定義

$\pi_0(x_0)$ を初期分布といい,$\mathbb{P}(X_0 = x_0)$ のことである.

考察

例

Markov Chain を考えると, たとえば次のようの計算ができる.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = x_2 | X_0 = x_0, X_1 = x_1) &= \mathbb{P}(X_2 = x_2 | X_1 = x_1) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = x_2 | X_0 = x_1) \\ &= P(x_1, x_2)\end{aligned}$$

考察

例

条件付き確率の定義を見ながら計算すると, 次を得る.

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \pi_0(x_0)P(x_0, x_1)P(x_1, x_2)$$

Markov Chain の特徴づけ

確率変数の列 (X_n) が Markov Chain であることは次の式が成り立つことと同値.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \cdots, X_n = x_n) \\ = \pi_0(x_0) P(x_0, x_1) \cdots P(x_n, x_{n+1})\end{aligned}$$

ここからはあまり文字を読まなくていいよ

Random Walk

$\xi_1, \xi_2, \cdots$ をそれぞれ独立で共通の密度関数 f を持つ確率変数列とする．X_0 は各 ξ_i とは独立な確率変数として,$n \geq 1$ に対して $X_n = X_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n$ とする．この時, 確率変数列 (X_n) は Markov Chain をなす．遷移関数は $P(x, y) = f(y - x)$ で与えられる．

Gambler's Ruin Chain

一人の賭博師がいる．彼は毎回ギャンブルをして, 勝てば 1 ドルを手に入れ, 負ければ 1 ドル失う．勝利する確率は p, 敗北する確率は q とする．また, 最初に X_0 だけ軍資金を持っていたとして,n 回目のゲーム終了時の彼の所持金を X_n で表す．このとき,X_n は確率変数で, 確率変数列 (X_n) は Markov Chain をなす．遷移関数は次で与えられる．

$$P(x, y) = \begin{cases} p & (y = x + 1) \\ q & (y = x - 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

Branching Chain

粒子がある．この粒子は増殖能力を持っていて次の瞬間にはいくつかの粒子に分裂している．もともといた粒子の個数を第 0 世代の粒子の個数と言うことにし,X_0 と置く．第 n 世代の粒子の個数を X_n とおく．一粒の粒子が次に世代では ξ 個に増殖しているとする．ξ は確率変数であり, 密度は f とする．このとき, 確率変数列 (X_n) は Markov Chain をなす．遷移関数は次で与えられる．

$$P(x, y) = \mathbb{P}(\xi_1 + \cdots + \xi_x = y)$$

発表の流れ

問題

会計のかわわん君はお金が好きなクズなので, 手軽にお金を増やそうと, ギャンブルに手を出した. あまりにも非現実的な賭けはやりたくないけど, 勝ち安定みたいなのもつまんないということで, こんなゲームを見つけ出した.

- 参加料 10 ドル. 内容はルーレットで最初に 10 コインもらえる.
- $\frac{9}{19}$ の確率で当たり. 1 コインもらえる
- $\frac{10}{19}$ の確率でハズレ. 1 コイン失う
- 手持ちが 20 コインでゲームに勝利,30 ドルもらいゲームを終了
- 手持ちが 0 コインで敗北. ゲームを終了

問題続き

このとき，次を求めよう.

- かわわん君がゲームに勝利する確率
- このゲームに参加して得られるドルの期待値

考察 1

n 回目のゲーム終了時の所持金を X_n とおくと，これは Gambler's Ruin Chain である．所持金は例えばこんな風に変化していく．

考察 1

n 回目のゲーム終了時の所持金を X_n とおくと，これは Gambler's Ruin Chain である．所持金は例えばこんな風に変化していく．

- $10 \to 11 \to 12 \to 11 \to \cdots \to 19 \to 20$

考察 1

n 回目のゲーム終了時の所持金を X_n とおくと，これは Gambler's Ruin Chain である．所持金は例えばこんな風に変化していく．

- $10 \to 11 \to 12 \to 11 \to \cdots \to 19 \to 20$
- $10 \to 9 \to 10 \to 9 \to \cdots 1 \to \to 0$
- など

考察 2

勝つためにはこの Markov Chain が 0 より先に 20 にたどり着けばよい!そこで,

$$N_{(20)} := \text{初めて } 20 \text{ にたどり着くターン数}$$
$$N_{(0)} := \text{初めて } 0 \text{ にたどり着くターン数}$$

とおいて,

$$\mathbb{P}(N_{(20)} < N_{(0)})$$

を求めればよい.

一般的な議論

状態 $y \in \mathcal{J}$ からスタートする Gambler's Ruin Chain を考える． $a < y < b$ なる状態 $a, b \in \mathcal{J}$ に対して，

$$N_{(a)[(b)]} := \text{初めて a[b] にたどり着く時刻}$$

とする．このとき，

$$\mathbb{P}(N_{(b)} < N_{(a)}) = \frac{\sum_{x=a}^{y-1} \left(\frac{q}{p}\right)^x}{\sum_{x=a}^{b-1} \left(\frac{q}{p}\right)^x}, \qquad (a < y < b)$$

答

先ほどの一般的な式を今回の場合に当てはめて計算してみる．
$a = 0, b = 20, y = 10$ とすればよい．すると，$\frac{p}{q} = \frac{\frac{9}{19}}{\frac{10}{19}} = \frac{10}{9}$ だから，

$$\mathbb{P}(N_{(20)} < N_{(0)}) = \left(\sum_{x=0}^{9} \frac{10^x}{9}\right) \div \left(\sum_{x=0}^{19} \frac{10^x}{9}\right)$$

$$= \left((\frac{10}{9})^{10} - 1\right) \div \left((\frac{10}{9})^{20} - 1\right) = 0.26$$

答

期待値を計算してみよう.

$$30 \times 0.26 = 7.8$$

このゲームの参加料は 10 ドルだったので 2.2 ドルの損失が期待できる. やるだけ損.

発表の流れ

感想

やっててちょっとだけおもろい

しかし

- 最近は位相空間の方が好き
- 測度空間や位相空間から出発して集合の世界を見るのが好きだということに気づいた
- そういう意味で関数解析とかの方面も気になるよなぁ？
- 統計チックなことはいらないっす
- でも理論的な確率論は最近はやっててちょっと楽しいよ(測度論なので)

参考文献


Paul G. Hoel
Sidney C. Port
Charles J. Stone
INTRODUCTION TO STOCHASTIC PROCESSES
講座 数学の考え方
20
確率論
舟木直久 著
朝倉書店