凸関数がリプシッツ連続であることの証明とやらかしの例

かわわん:@skbtkey

2019 年 1 月 4 日

1　凸関数

定義 1.1 (凸関数)**.** 集合 $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数 f が (下に) 凸な関数であるとは次を満たすこと。$\forall \lambda \in (0,1), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ に対して、

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

が成り立つもの。

例 1.1. $x^2, |x|$ など。

高校で習った「下に凸な関数」というやつ。

2　凸関数の性質

凸関数には以下のような性質がある。

命題 2.1. f を凸関数とするとき、以下が成立。

1. f は右微分係数と左微分係数を持つ。
2. f はリプシッツ連続。したがって、連続関数。

3 証明 (正しいほう)

この命題の証明はインターネットで検索すれば普通にヒットするし、証明が丁寧に乗っている本もあるかと思う。が、(僕自身の復習の意味をこめて) 一応書いておく。

補題 3.1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を凸関数とする。$x, y, z \in \mathbb{R}$ で, $x < y < z$ とする。このとき、

$$\Delta_{x,y} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

とすると、

$$\Delta_{x,y} \leq \Delta_{y,z}$$

が成立する。

この補題は、凸関数は変換の割合が単調増加であると主張している。この補題が証明できればほぼ命題の証明は完成である。しかし、この補題の証明は主張の式をそのまま計算してもうまくいかない。評価が甘くなってしまうのである。そこでひと工夫をするわけであるが...。それがこの文書のタイトルの「やらかし」である。これはあとで述べよう。このsection の残りは補題の証明と命題の証明を書いておく。

補題の証明. $x < y < z$ とすると、ある $\lambda \in (0, 1)$ が存在して、

$$y = \lambda x + (1 - \lambda) z$$

と表わせる。

$$\begin{aligned}
\Delta_{xz} - \Delta_{xy} &= \frac{f(z) - f(x)}{z - x} - \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \\
&= \frac{f(z) - f(x)}{z - x} - \frac{f(y) - f(x)}{\lambda x + (1 - \lambda) z - x} \\
&= \frac{f(z) - f(x)}{z - x} - \frac{f(y) - f(x)}{(1 - \lambda)(z - x)} \\
&= \frac{f(y) - (\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(z)}{(1 - \lambda)(z - x)} \\
&\geq \frac{f(y) - f(y)}{(1 - \lambda)(z - x)} = 0
\end{aligned}$$

したがって、

$$\Delta_{xz} \geq \Delta_{xy}$$

が分かる。同様にすると、

$$\Delta_{yz} \geq \Delta_{xz}$$

が成り立つので、

$$\Delta_{xy} \leq \Delta_{xz} \leq \Delta_{yz}$$

が分かる。 $\square$

命題の証明. (1 について) $a \in \mathbb{R}$ をとる。$\alpha < a < \beta$ とする。$x \in (\alpha, \beta)$ とする。補題より、

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \leq \max\left\{\left|\frac{f(a)-f(\alpha)}{a-\alpha}\right|, \left|\frac{f(\beta)-f(a)}{\beta-a}\right|\right\}$$

そこで、この不等式の右辺を M とおくと、

$$|f(x)-f(a)| \leq M|x-a|$$

がわかり、(α, β) 上リプシッツ連続。したがって、a 上連続関数である。a は任意より $\mathbb{R}$ 上連続関数である。

(2 について) 補題より

$$x < y < z \Rightarrow \Delta_{xy} \leq \Delta_{yz}$$

なので、x を変数、y, z を固定して考えれば、右辺は定数で、左辺は x に関しての単調増加関数となる。したがって、

$$\lim_{x \to y} \Delta_{xy}$$

は収束する。これは左微分係数が存在することを示したことになる。右微分係数についても x, y を固定し z を変数とみれば同様。

$\square$

4 やらかし証明

これがこの pdf の本題。命題の方の証明は何もないが補題の方の証明でやらかしてしまった。

直接 $\Delta_{yz} - \Delta_{xy}$ を計算してみよう。

$$\begin{aligned}
\Delta_{yz} - \Delta_{xy} &= \frac{f(z)-f(y)}{z-y} - \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \\
&= \cdots \\
&= \frac{yf(z)-xf(z)+xf(y)-zf(y)+zf(x)-yf(x)}{(z-y)(y-x)}
\end{aligned}$$

となる。この式を評価して 0 以上であることを示したい。使うことができるのは凸関数の定義の不等式だから、何とかその形を生み出したい。おそらく分子を z でくくればいいだろう。煩雑さを避けるために分子のみ書く。

$$
\begin{aligned}
&\frac{y}{z}f(z)-\frac{x}{z}f(z)+\frac{x}{z}f(y)-f(y)+f(x)-\frac{y}{z}f(x) \\
=&\left(1-\frac{y}{z}\right)f(x)+\frac{y}{z}f(z)-\left((1-\frac{x}{z})f(y)+\frac{x}{z}f(z)\right)
\end{aligned}
$$

左側の二項と右側の二項で凸関数の式が使える形になった。しかしどうだろう、右側の二項は全体に -1 が掛けられているから不等号の向きが逆になってしまい、うまく評価できない。この式計算はここで終了してしまう。これは、$y=\lambda x+(1-\lambda)z$ としても同様の現象が発生してしまう。

4.1 考察

上手くいかないかった理由は何だろうか。不等式の評価でうまくいかないときは大抵「評価が甘い」のだ。大小を比べている二つのモノの差が開き過ぎているのだ。そのため計算がうまくいかない。もっと、良い評価は無いんだろうか。

凸関数の最も身近な例であろう $f(x)=x^2$ のグラフを描いて、Δ_{xy},Δ_{yz} を描いてみる。$f(x),f(y)$ を線で結んで、$f(y),f(z)$ を線で結ぶのである。あれれ、もしかして Δ_{xz} とか...？これはどうなっている？ $f(x),f(z)$ を線で結んでみる。この直線の傾きは...。この瞬間、$\Delta_{xy}<\Delta_{yz}$ を示すためには、$\Delta_{xy}<\Delta_{xz}$ を示せばいいんじゃないかと気づく。一般の f に戻ってこれを実際計算してみてると、うまくいく。

4.2 まとめ

不等式の評価がうまくいかない時はある。そんな時は、計算ミスしていないことをさっと確認する。そのあとは、見逃しているより厳しい評価が無いか探してみるのがいいんじゃないかと思いました。こういうのさっと見つけられる人は解析向いてると思う。

この記事の補題、[1] に乗ってたんですが、こんな書き方するからこういう証明のやらかしをするんであって、はじめから

$$\Delta_{xy}<\Delta_{xz}<\Delta_{yz}$$

って書いてくれよ〜。あかんか〜。そうかダメか〜。

参考文献

1 David Williams "Probability with Martingales"