生成された σ-alg. の逆像：" $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ "

かわわん:@skbtkey

測度論および集合論の小ネタ。逆像は集合演算を保存するが、σ[*1]でさえも成立しちゃう。[*2]

1　問題

X, Y をそれぞれ空でない集合とする。$\mathcal{C}$ を Y の部分集合の族とする。$f\colon X \longrightarrow Y$ という写像が与えられている。$\sigma(\mathcal{C})$ は $\mathcal{C}$ により生成される σ-alg.、つまり、$\mathcal{C}$ を含む Y 上の最小の σ-alg. を表すとする。このとき、

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$$

が成立する。ただし、ここで Y の部分集合族 $\mathcal{A}$ に対して、$f^{-1}(\mathcal{A})$ は以下で定義される X の部分集合族のことである。

$$f^{-1}(\mathcal{A}) = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$$

2　解答

スタンダードに両側の包含関係を示す

$f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \supset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ について。こちら側はあまりメインではないので軽くすます。逆像は集合演算を保存するので、σ-alg. の三条件は確かめられる。

一つ目：$X = f^{-1}(Y)$ であり、$Y \in \sigma(\mathcal{C})$ より、$f^{-1}(Y) \in f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$

二つ目：$A \in f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ とする。$f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ の定義より、ある $C \in \sigma(\mathcal{C})$ があって、$A = f^{-1}(C)$ と書ける。このとき、$A^c = X - A = f^{-1}(Y - C) = f^{-1}(C^c)$ である。$C \in \sigma(\mathcal{C})$ より、$C^c \in \sigma(\mathcal{C})$ である。

三つ目：$(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ とする。各 i について $C_i \in \sigma(\mathcal{C})$ が存在し、$A_i = f^{-1}(C_i)$ と書ける。さて、$\bigcup_i A_i = \bigcup_i f^{-1}(C_i) = f^{-1}(\bigcup_i C_i)$ である。全ての i について、$C_i \in \sigma(\mathcal{C})$ だから、$\bigcup_i C_i \in \sigma(\mathcal{C})$ である。

$f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ について。こちらが問題。測度論ではおなじみの手法で証明する。Y の部分集合族 $\mathcal{D}$ を次のように定義する；$\mathcal{D} := \{A \subset Y \mid f^{-1}(A) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))\}$ とする。ここで、$\mathcal{D}$ が $\mathcal{C}$ を含む σ-alg. であることを示す。$C \in \mathcal{C}$ とする。当然、$C \in \sigma(\mathcal{C})$ であり、$f^{-1}(C) \in f^{-1}(\mathcal{C})$

[*1] 生成される σ-alg. を指す

[*2] LaTeX が久々すぎて書き方がぐちゃぐちゃ。すみません

より、$f^{-1}(C) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ である。したがって、$C \in \mathcal{D}$ である。よって、$\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ が成り立つ。次に、$\mathcal{D}$ が σ-alg. であることを示そう。

一つ目：$Y \in \sigma(\mathcal{C})$ である。$f^{-1}(Y) = X$ であり、$\sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ は X 上の σ-alg. なので、$X \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ である。したがって、$f^{-1}(Y) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ がなりたつ。よって、$Y \in \mathcal{D}$

二つ目：$A \in \mathcal{D}$ とする。$\mathcal{D}$ の定義より、$f^{-1}(A) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ である。よって、$(f^{-1}(A))^c = X - f^{-1}(A) = f^{-1}(Y - A) = f^{-1}(A^c)$ も、$\sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ に属する。したがって、$A^c \in \mathcal{D}$

三つ目：$(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ とする。各 i について、$\mathcal{D}$ の定義から、$f^{-1}(A_i) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ である。したがって、$\bigcup_i f^{-1}(A_i)$ も $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ に属する。$\bigcup_i f^{-1}(A_i) = f^{-1}(\bigcup_i A_i)$ であるから、$\bigcup_i A_i \in \mathcal{D}$

以上により、$\mathcal{D}$ は σ-alg. であることが証明できた。したがって、

$$\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$$

である。よって、

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(\mathcal{D})$$

である。いっぽう、$\mathcal{D}$ の定義より

$$f^{-1}(\mathcal{D}) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$$

ゆえに、

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$$

3　色々お話

3.1　演習問題としてよくあるっぽい

この問題と同様の問題は [3] や [4] などにあります。

3.2　系

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ を確率空間、X を Ω 上の $\mathbb{R}$-値確率変数とします。

$$\pi(\mathbb{R}) :\, = \{(-\infty, x] \mid x \in \mathbb{R}\}$$

としたとき、$\sigma(\pi(\mathbb{R})) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ となります[*3]。

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \equiv X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

ですので[*4]、

$$\sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = X^{-1}(\sigma(\pi(\mathbb{R}))) = \sigma(X^{-1}(\pi(\mathbb{R})))$$

[*3] [3] の 1.6.(b) などを参照

[*4] これの証明は簡単。$X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ は σ-alg. であることは証明でき、$\mathcal{G}$ を X が可測になるような Ω 上の σ-alg. とする。すると、可測写像の定義より、$X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{G}$ がわかる。

つまり、

$$\sigma(X) = X^{-1}(\sigma(\pi(\mathbb{R}))) = \sigma(X^{-1}(\pi(\mathbb{R})))$$

ということが分かります。

3.3 コメントなど

昔わたしもこの問題をセミナーで取り組みました。解答後半の包含関係を証明するときに、次のような言い方で誤魔化していました。

> 「$\sigma(\mathcal{C})$ の元 F は $\mathcal{C}$ のいくつかの要素 (高々可算個) に、何回か (高々可算回) の集合演算を施して得られる。一方で、f^{-1} は集合演算を保存するので、$f^{-1}(F)$ は、そういった集合演算を f^{-1} の外に出すことができる。よって、$f^{-1}(F) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ である」

しかしこれではさすがにちゃんと議論しようとすると困ります。それを解決するのが、上記の解答になります。そもそもアプローチが違いましたね。$\mathcal{D}$ という集合族を用意してトップダウン的に示しています。しかし、「何個かの要素に何回かの集合演算を施す」を正確に記したボトムアップ的な証明もあります。これを書こうと思ったのですが、調べていると generated σ-alg. の構成的な定義の話 (「〇〇を含む σ-alg. 全体の共通部分」という定義ではなく、生成された σ-alg. の具体的な構成から定義していく方法) まで立ち返らないといけなかったです。この証明には順序数などの集合論の言葉が必要になります。出来上がりしだい pdf を更新します。とりあえず今のところはここまで。

参考文献

[1] Preimage of generated σ -algebra(外部サイトに飛びます)

[2] Patrick Billingsley ”Probability and Measure” Third Edition(外部サイトに飛びます)

[3] David Williams ”Probability with Martingales”

[4] Rick Durrett ”Probability: Theory and Examples”

[5] 舟木直久『確率論』