バナッハタルスキーのパラドックス

Twitter：@skbtkey

概要

皆さんはバナッハタルスキーのパラドックスを聞いたことはあるだろうか．球 A をうまい具合に有限個に分割すれば，それらをうまい具合に組み合わせ直すことで球 A より大きな球 B を作り出すことができるという定理である．これは選択公理と呼ばれる無限に関係する公理を認めれば証明できてしまうなんとも不思議な定理である．

1 準備

2 回生相当の数学の知識があればよいので，この章は読み飛ばしてもらっても構わない．

1.1 選択公理

さっそく証明をしていくのだが，選択公理とは何かを確認しておこう．

> **公理 1** (選択公理)**.** 空集合を元に持たない集合族に対して，各要素から一つずつその要素を選び，新しい集合を作ることができること．

もっと分かりやすいのが次の命題である (選択公理と同値)

> **命題 2.** $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をどれも空集合でないような集合の族とすると，それらの直積も空集合ではない．

バナッハタルスキーのパラドックスを示す際，ある同値関係を定義する．その同値類の代表系を取っていくときにこの選択公理を用いる．

1.2 群

1.2.1 群の定義

群論については 2 回生配当の代数学序論で詳しく学んでもらいたい．証明中で用いる話だけ整理する．

定義 3 (群の定義)．集合 G と演算と呼ばれる写像 $* : G \times G \to G$ が次の性質を満たすとき，二つ組 $(G, *)$ を群という．

(1) 任意の $x, y, z \in G$ に対して，$(x * y) * z = x * (y * z)$

(2) $1_G \in G$ という G の元が存在して, 任意の $x \in G$ に対して, $x*1_G = 1_G*x = x$

(3) 任意の $x \in G$ に対して $x^{-1} \in G$ が存在して $x * x^{-1} = x^{-1} * x = 1_G$

例を見てみます．

例 4. (1) $\mathbf{R}$ は通常の加法の演算により群なる．つまり $(\mathbf{R}, +)$ は群である．

(2) $GL_2(\mathbf{R})$(実数を成分に持つ 2×2 の正方行列) は通常の行列の和の演算により群になる．つまり $(GL_2(\mathbf{R}), +)$ は群である．

(3) $\mathbf{N}$ は通常の積の演算では群にならない．つまり $(\mathbf{N}, \times)$ は群ではない．

(4) $GL_2(\mathbf{R})$ は通常の行列の積の演算では群にならない．つまり $(GL_2(\mathbf{R}), \times)$ は群ではない．

問題 5. 上記の (1) から (4) を確かめよ

1.2.2 群の作用

バナッハタルスキーのパラドックスの証明では図形を回転させる．この回転は写像とみることができる．($\mathbf{R}^2$ における図形の回転行列を思い出そう!)．$\mathbf{R}^3$ 内での図形の回転をすべて集めたものが群構造をもち (群になる)，それが $\mathbf{R}^3$ という集合に「作用」する．

定義 6 (群の作用)**.** G を群, X を集合とする．次の性質を満たす写像 $f : G\times X \to X$ が与えられたとき，群 G は X に (左から) 作用するといい，X を $G-$ 空間という．また，この f を (左) 作用という．

(1) $f(1_G, x) = x\,(x \in X)$

(2) $f(g, f(h, x)) = f(gh, x)\,(g, h \in G, x \in X)$

とくに $G-$ 空間 X において，$g \in G, x \in X$ について，

$$f(g, x) = x \Rightarrow g = 1_G$$

のとき，G は X に自由に作用するという．

例 7. $(G, *)$ を任意の群とし，G の G 自身への作用を $f(g, h) = g * h$ により定義する．これを G の G 自身への左作用という

例 8. S^2 を原点を中心とする球面とし，$SO(3)$ を回転群とすると，S^2 は $SO(3)-$ 空間である．ここで，回転群 $SO(3)$ とは，3 次の正方行列 g で，

$${}^t g * g = E(\text{単位行列}), \quad \det g = 1$$

を満たすもの全体からなる乗法群．積*は行列の積で逆元は逆行列，単位元は単位行列．作用は,

$$f(g, x) = g * x\,(g \in SO(3), x \in S^2 \subset \mathbf{R}^3)$$

であたえられる．

例 9. $M(3)$ を $\mathbf{R}^3$ の合同変換群 (原点の周り飲ん回転と平行移動の合成として得られる変換の全体) とすると $\mathbf{R}^3$ は $M(3)-$ 空間である．作用は，

$$f(g, x) = g * x\,(g \in M(3) \subset GL_3(\mathbf{R}), x \in \mathbf{R}^3)$$

で与えられる．ただし，積 $*$ は行列の積である．

注意 10. $G-$ 空間 X が与えられた時，X には次のようにして同値関係 $\sim$ が入る: $x \sim y \Leftrightarrow y = gx$ となる $g \in G$ が存在．x を含む同値類は $Gx = \{gx | g \in G\}$ である．同値関係 $\sim$ の代表系を $G-$ 作用の代表系という．

同値関係，同値類，代表系の意味がよくわからない方は他の分かりそうな方に聞いてみるか，集合位相を扱った数学書を読んでもらいたい．

1.2.3 自由群

n 個の変数から生成される群でこれらの元に全く関係がない群のことを自由群という (生成群については群論の教科書を参照してほしい)．証明では $n = 2$ 個の変数を用いた自由群を使う．

ある国の言語は a, b, a^{-1}, b^{-1} という四つの文字しかなく，この文字を並べることでこの国のすべての単語を表していたとしよう．

例 11. $aaa, ab^{-1}a, a, aa^{-1}aab^{-1}bba$ はこの国の単語である．一方，$abbbbc, d, I, love, you$ などはこの国の単語ではない．また，文字が一切使われていない語句もこの国の単語とみなしそれを ϕ と書くことにする．

普段我々がもちいる言葉には類義語が存在する．英語だと think,desire,wish,hope などは「思う」だが,「思う」の種類が違うことはご存じだろう．この国にも類義語が存在する．$aa^{-1}, a^{-1}a, bb^{-1}, b^{-1}b$ が単語の中の文字列に入っているならばそれを消した単語も元の単語と同じ意味を持つ単語としてみなすのである．この文字列を消す操作を縮約と呼ぶ．

例 12. $aa^{-1}b^{-1}b^{-1}b$ は aa^{-1}(最初の二文字) と $b^{-1}b$(最後の二文字) があるから，これらを消した b^{-1} という単語と同じ意味を持つ．いいかれば，$aa^{-1}b^{-1}b^{-1}b$ と b^{-1} は類義語である．

この国の単語 w が $aa^{-1}, a^{-1}a, bb^{-1}, b^{-1}b$ のいずれかの文字列を含んでいるとき，w は可約であると呼ぼう．含まないときは既約と呼ぼう．

この国の単語全体の集合を W とする．二つの単語 $w, z \in W$ があったときそれぞれの単語を縮約することによって (縮約できなければ縮約しなくてもいい)，w, z が類義語になった時，$w \sim z$ と表わすと，関係 $\sim$ はこの国の単語全体の集合上の同値関係になる．各同値類は必ず既約な単語を持っている．したがって，既約な単語の集合は代表系になる．

さて，既約な単語どうしを繋げたら新しい単語ができるのではないか．たとえば，a,b という単語がありそれを繋げれば ab という新しい単語ができるる．単語を繋げるこの操作を演算としたとき (繋げる，組み合わせるということなのでこの演算は仮に C と書いておく)，組 $(W/\sim, C)$ は群になる．これを**二つの文字** a, b **で生成された自由群**という．この群の単位元は ϕ であり，$w \in W/\sim$ に対する逆元は w の文字列を反転して，その後 a と a^{-1} を，b と b^{-1} を取り換えてできる単語である．このようにして作る単語を w^{-1} とかく．

問題 13. (1) 演算 C が well-defined であることを示せ

(2) $(W/\sim, C)$ が群の公理をみたしていることを示せ

(3) $(W/\sim, C)$ はアーベル群であるかどうかを判定せよ

2 証明

それでは実際に証明を述べていく．$SO(3)$ は例 8 で定義したものと同じものである．$M(3)$ は例 9 で定義したものとおなじものである．

2.1 抽象論

定義 14 ($G-$ 合同)**.** X を $G-$ 空間とする．X の部分集合 A, B に対して，$B = gA = \{ga|a \in A\}$ となる $g \in G$ が存在するとき，A は B に $G-$ 合同といい，$A \equiv_G B$ とかく．

問題 15. 関係 $\equiv_G$ は X の部分集合族上の同値関係である

例 16. $X = \mathbf{R}^3, G = M(3)$ の場合，$G-$ 合同は通常の図形の合同と同じ．A, B を縦と横の長さが 2 で高さが 3 の直方体の一つで向きが異なっているものとする．A をうまく回転して平行移動すれば B とかさなるので A と B は合同．つまり，$A = gB$ と書けることになるので，A は B に $G-$ 合同である．

定義 17 ($G-$ 分割合同)**.** X の部分集合 A, B に対して，

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n \quad B = B_1 + B_2 + \cdots + B_n \quad A_i \equiv_G B_i \, (i = 1, 2, \cdots, n)$$

となるような $A_1, \cdots, A_n, B_1, \cdots, B_n$ が存在するとき A と B は $G-$ 分割合同といい，$A \approx_G B$ とかく．
X の部分集合 A, B に対して，A が B のある部分集合と $G-$ 分割合同であるとき，$A \ll_G B$ とかく．

問題 18. $A \subset B$ ならば $A \ll_G B$

バナッハタルスキーのパラドックスの主張は次のように書くことができる．

$\mathbf{R}^3$内の二つの任意の球体が常に $M(3)-$ 分割合同である

次に $\equiv_G, \approx_G, \ll_G$ に関する定理を述べる．証明は省くが，成り立っていて欲しい性質である．

補題 19. (1) $\approx_G$ は同値関係
(2) $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n \quad B = B_1 + B_2 + \cdots + B_n, A_i \approx_G B_i$ ならば $A \approx_G B$ が成り立つ

分割したパーツが $G-$ 合同なら元々の図形も $G-$ 合同であるという主張である．

補題 20. $A \approx_G B$ である時，全単射 $\varphi : A \to B$ で，A 全ての部分集合 C に対して $C \approx_G \varphi(C)$ が成り立つようなものが存在する．

補題 21. $A \ll_G B, B \ll_G C \Rightarrow A \ll_G C$

補題 22. $A \ll_G B, B \ll_G A \Rightarrow A \approx_G B$

順序のように扱えるのは便利である．なお，補題 22 については集合論でのベルンシュタイン定理のように証明する．

補題 23. $G-$ 空間 X の部分集合 A, B について $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n, B = g_1 A_1 + g_2 A_2 + \cdots + g_n A_n (g_i \in G)$ であるとき，$A \ll_G B$ が成り立つ．

つぎに，証明のキーとなる逆説的集合について定義する

定義 24. X を $G-$ 空間とする．X の部分集合 E に対して，互いに交わらない E の部分集合 $A_1, \cdots, A_m, B_1, \cdots, B_n$ と G の要素 $g_1, \cdots, g_m, h_1, \cdots, h_n$ で

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} g_i A_i = \bigcup_{j=1}^{m} h_j B_j$$

となるものが存在するとき，E を $G-$ 逆説的集合という．

本当にそんなものが存在するのかと思われるが，それは補題 28 を見ていただきたい．

補題 25. E が $G-$ 逆説的であれば，$A \approx_G E \approx_G B, A \cap B = \phi$ を満たす E の部分集合 A, B が存在する．逆も成り立つ．

補題 26. E が $G-$ 逆説的であれば $A \approx_G E \approx_G B, A \cap B = \phi, A \cup B = E$ を満たす E の部分集合 A, B が存在する．逆も成り立つ．

補題 27. $G-$ 空間 X の部分集合 E, E' について，$E \approx_G E'$ かつ E が $G-$ 逆説的であれば，E' も $G-$ 逆説的

補題 28. G を文字 a, b により生成される自由群とする．G は G の左作用により，$G-$ 逆説的である．

証明. G の二つの分類

$$G = W(a) \cup aW(a^{-1}) = W(b) \cup bW(b^{-1})$$

を考える．ただし，$W(a)$ とは a を最初の文字とする既約な単語の集合である．これは G の分割を与える．実際，任意の既約な単語 w について，w が a から始まる単語なら $w \in W(a)$ である．一方そうでないならば，$w \in aW(a^{-1})$ である．なぜならば，$a^{-1}w \in W(a^{-1})$ であり，したがって，$aa^{-1}w \in aW(a^{-1})$ すなわち，$w \in aW(a^{-1})$．$G = W(b) \cup bW(b^{-1})$ についても同様である．さて，$G = W(a) \cup aW(a^{-1}) = W(b) \cup bW(b^{-1})$ という式は G が左作用により $G-$ 逆説的であることを意味する． □

群 G が左作用により $G-$ 逆説的であるとは，「G は自身への左作用によって $G-$ 空間になっていて，このとき，G 自身が $G-$ 逆説的集合である」という意味である．

定義 29. G の左作用により G が $G-$ 逆説的であるとき，G を逆説的群という．

補題 28 によって，自由群は逆説的群であることが分かった．

次の補題で「選択公理」が用いられる．

補題 30. 逆説的群 G が X に自由に作用すれば，X は $G-$ 逆説的である．

証明に入る前に，この補題は後に G が $SO(3)$ として，X が S^2 などに適応して用いていく（？）．

証明. G が逆説的群という仮定から, 互いに交わらない G の部分集合 $A_1, A_2, \cdots, A_m, B_1, \cdots, B_n$ と G の要素 $g_1, \cdots, g_m, h_1, \cdots, h_n$ で

$$G = \bigcup_{i=1}^{m} g_i A_i = \bigcup_{j=1}^{m} h_j B_j$$

となるものが存在する．

ところで選択公理より，$G-$ 作用の代表系 $M \subset X$ が存在する．[*1] この M について，

$$X = \bigcup_{g \in G} gM, \quad gM \cap hM = \phi (g \neq h)$$

となるものが存在する．実際，M が代表系であることから，任意の X の元 x に対して，ある $y \in M$ があって，$x \sim y$ すなわち，ある $g \in G$ があって，$x = gy$ である．したがって，$M \ni y = g^{-1}x$ である．よって，$X \subset \bigcup_{g \in G} gM$．逆は明らか．よって $X = \bigcup_{g \in G} gM$．一方，$x \in gM \cap hM$ とすると，$\sim$ の定義より，$x = gy = hz$ なる $y, z \in M$ が存在するが，$gy = hz$ より $y \sim z$ が従う．$y, z \in M$ だったので $y = z$ となる．よって，$gy = hy$ すなわち，$h^{-1}gy = y$ となり，G が X に自由に作用しているから，$h^{-1}g = 1_G$ すなわち，$h = g$ を得る．

$$A_i^* = \bigcup_{g \in A_i} gM, \quad B_j^* = \bigcup_{g \in B_j} gM$$

とおく．$A_1, \cdots, A_m, B_1, \cdots, B_n$ が互いに素であったことと，$gM \cap hM = \phi (g \neq h)$ であることより，$A_1^*, \cdots, A_m^*, B_1^*, \cdots, B_n^*$ は互いに交わらない X の部分集合である．ま

[*1] 注意 10 を参照

た，$X = \bigcup_{g \in G} gM$ より

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} A_i^* = \bigcup_{j=1}^{n} B_j^*$$

であるから，X は $G-$ 逆説的である． □

2.2 $\mathbf{R}^3$ と回転群 $SO(3)$ への応用

2.2.1 回転群と自由群

さて，抽象的な話の整理がついたところで実際に $\mathbf{R}^3$ での話を見ていこう．

回転 $g \in SO(3)$ が単位行列と異なるとき，$gx = x$ となるベクトル $x \in \mathbf{R}^3$ はスカラー倍を除いて位置に定まる．この x が定める (原点を通る) 直線を g の回転軸という．要するに三次元空間上の原点を通る直線のことである．回転群 $SO(3)$ は S^2 に自由に作用しない．$g \in SO(3)$ が単位行列でない時，g の回転軸と S^2 との交点は g が決まった時点で固定されてしまう．すなわち，$gx = x \Rightarrow g = 1_G$ でなくてもよいことになるからである．

さて，回転群 $SO(3)$ 部分群が文字 a, b から生成される自由群と同型であることを見ていこう．

補題 31.

$$\alpha^{\pm 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

とおくと，$\alpha^{\pm 1}, \beta^{\pm 1}$ が生成する $SO(3)$ の部分群は自由群と同型である．$\alpha^{\pm 1}$ は z 軸周りの回転で $\beta^{\pm 1}$ は x 軸周りの回転である．回転角は $\cos\theta = \frac{1}{3}$ を満たす．正四面体の二面角と等しい (らしい)．

2.2.2 球面 S^2 の $SO(3)-$ 逆説性

ここから一気にバナッハタルスキーのパラドックスへと迫っていく．S^2 を原点を中心とする球面としてこれを $SO(3)-$ 空間と考える．

補題 32. S^2 の可算部分集合 D で，$S^2 \setminus D$ が $SO(3)-$ 逆説的になるものが存在する．

補題 33. D が球面 S^2 の可算分集合であれば，$S^2 \approx_{SO(3)} S^2 \setminus D$ つまり，$S^2, S^2\setminus$ を同じ

個数に分割した時，それぞれのパーツが回転によって $SO(3)-$ 合同になるということである．

ちょっとそれっぽくなってきましたね．

補題 34. S^2 は $SO(3)-$ 逆説的である．

あー近い！次はついに球面から球にいきますよ〜！

補題 35. 球体 K は $M(3)-$ 逆説的である．

補題 36. 任意の球体 K_0 は，互いに交わらない，K_0 と同じ大きさの二つの球体 K_1, K_2 の和 $K_1 + K_2$ と $M(3)-$ 分割合同である（！（やば！））．したがって，この補題を有限回適用することで，互いに交わらない，K_0 と同じ大きさの n 個の球体 $K_1, \cdots, K_n$ の和 $K_1 + \cdots + K_n$ と $M(3)-$ 分割合同である．

2.3 バナッハタルスキーのパラドックスの証明

はい，証明をほとんどせずにやってきましたが，最後の最後くらいは証明しますよ〜〜．今一度主張を確認しておきます．

定理 37 (バナッハタルスキーのパラドックス)**.** 球体 K, L に対して $K \approx_{M(3)} L$ が成立する．

もっと一般に，球体を内部に含む $\mathbf{R}^3$ の有界な部分集合 K, L に対して $K \approx_{M(3)} L$ となることを証明する．$K \ll_{M(3)} L$ を示せば十分である．補題 22 より片方だけを示すことができれば $K \approx_{M(3)} L$ が従う．

$K_0 (\subset L)$ を球体とし，K_0 と同じ大きさの球体 $K'_1, \cdots, K'_n$ により K を覆う．すなわち，

$$K \subset K'_1 \cup \cdots \cup K'_n$$

とする．

一方，互いに交わらない，K_0 と同じ大きさの n 個の球体 $K_1, \cdots, K_n$ の和

$$S = K_1 + \cdots + K_n$$

を用意する．補題 36 より，$K_0 \approx_{M(3)} S$ であるから，とくに，$S \ll_{M(3)} K_0$ である

($\ll_{M(3)}$ の定義，$\approx_{M(3)}$ が同値関係であり，$K_0 \subset K_0$ であることより)．補題 23 より

$$K \subset K_1' \cup \cdots \cup K_n' \ll_{M(3)} S$$

よって，$K \ll_{M(3)} S \ll_{M(3)} K_0 \subset L$ となるから，$K \ll_{M(3)} L$．(補題 21 および，問題 18)

これにてバナッハタルスキーのパラドックスを証明することができた．

3 あとがき

証明少なすぎでしょ．

研究室のセミナーを予習してたらバナッハタルスキーのパラドックスに言及があって，気になって調べてみたら砂田先生の本に証明が載ってるらしいということでさらに amazon で 400 円で本が買えるとのことでポチらざるを得なかったですね (締め切り 1 週間前くらい)．そして届いた本を三日ぐらいで読んで，証明をここに記したという感じです．選択公理というフィールド魔法が発動時，$\mathbf{R}^3$ に $SO(3)$ でチェーンを組むとああ (バナッハタルスキーに) なったというイメージだけはつかみました (遊戯王脳)．

証明書いて無さ過ぎて流石にひどいので，何か講演できる機会があればもっとちゃんと証明をなぞってしゃべりたいと思います．

参考文献

[1] 砂田利一　『バナッハ・タルスキーのパラドックス』 岩波科学ライブラリー (岩波書店,1997 年)

[2] 雪江明彦　『代数学 1　群論入門』　日本評論社 (2010 年)

[3] 森田茂之　『講座数学の考え方 8　集合と位相空間』　朝倉書店 (2002 年)